$\boxed{4}$ (60 点)

xyz 空間内において，連立不等式

$$\frac{x^2}{4}+y^2 \leqq 1, \qquad |z| \leqq 6$$

により定まる領域を V とし，2 点 $(2, 0, 2)$，$(-2, 0, -2)$ を通る直線を ℓ とする．

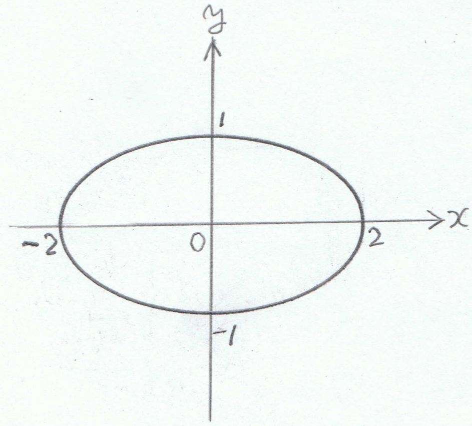
(1) $|t| \leqq 2\sqrt{2}$ を満たす実数 t に対し，点 $\mathrm{P}_t\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ を通り ℓ に垂直な平面を H_t とする．また，実数 θ に対し，点 $(2\cos\theta, \sin\theta, 0)$ を通り z 軸に平行な直線を L_θ とする．L_θ と H_t との交点の z 座標を t と θ を用いて表せ．

(2) ℓ を回転軸に持つ回転体で V に含まれるものを考える．このような回転体のうちで体積が最大となるものの体積を求めよ．

[確認事項]

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1 \quad \text{------ ㋐}$$

これは右図のような楕円を表す。

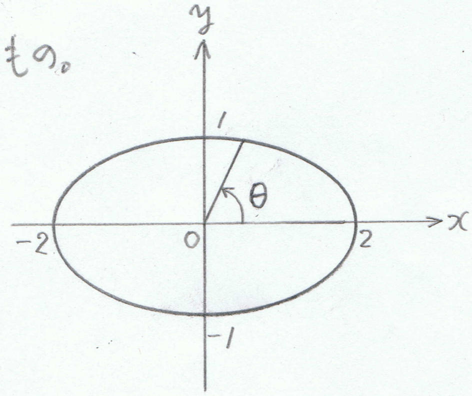


$$\frac{x^2}{4}+y^2\leqq 1$$

これは左の楕円の周及び内部を表す。

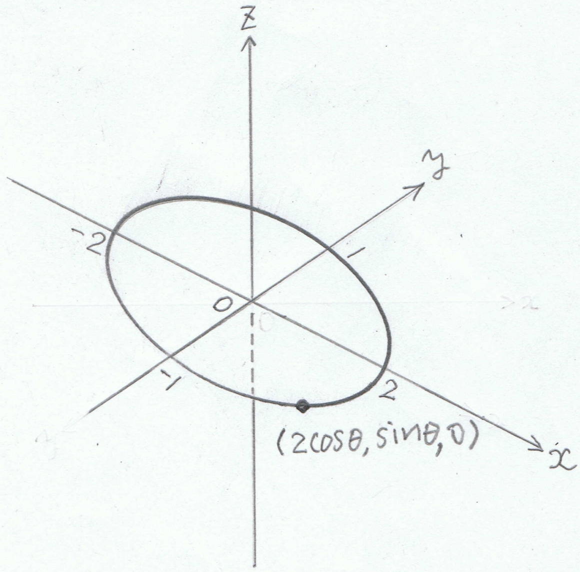
$$\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases} \quad \text{------ ㋑}$$

これは楕円㋐を角θで媒介変数表示したもの。



$(2\cos\theta, \sin\theta, 0)$

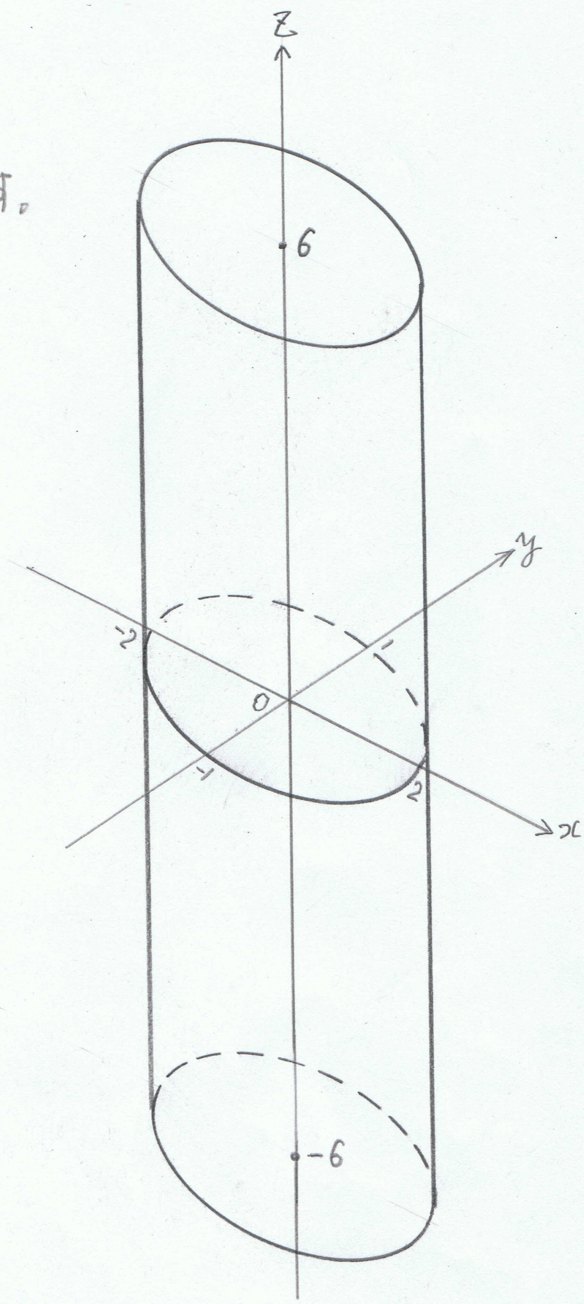
これは、右図のように、xy平面上にある楕円㋐の周上の点を表す。



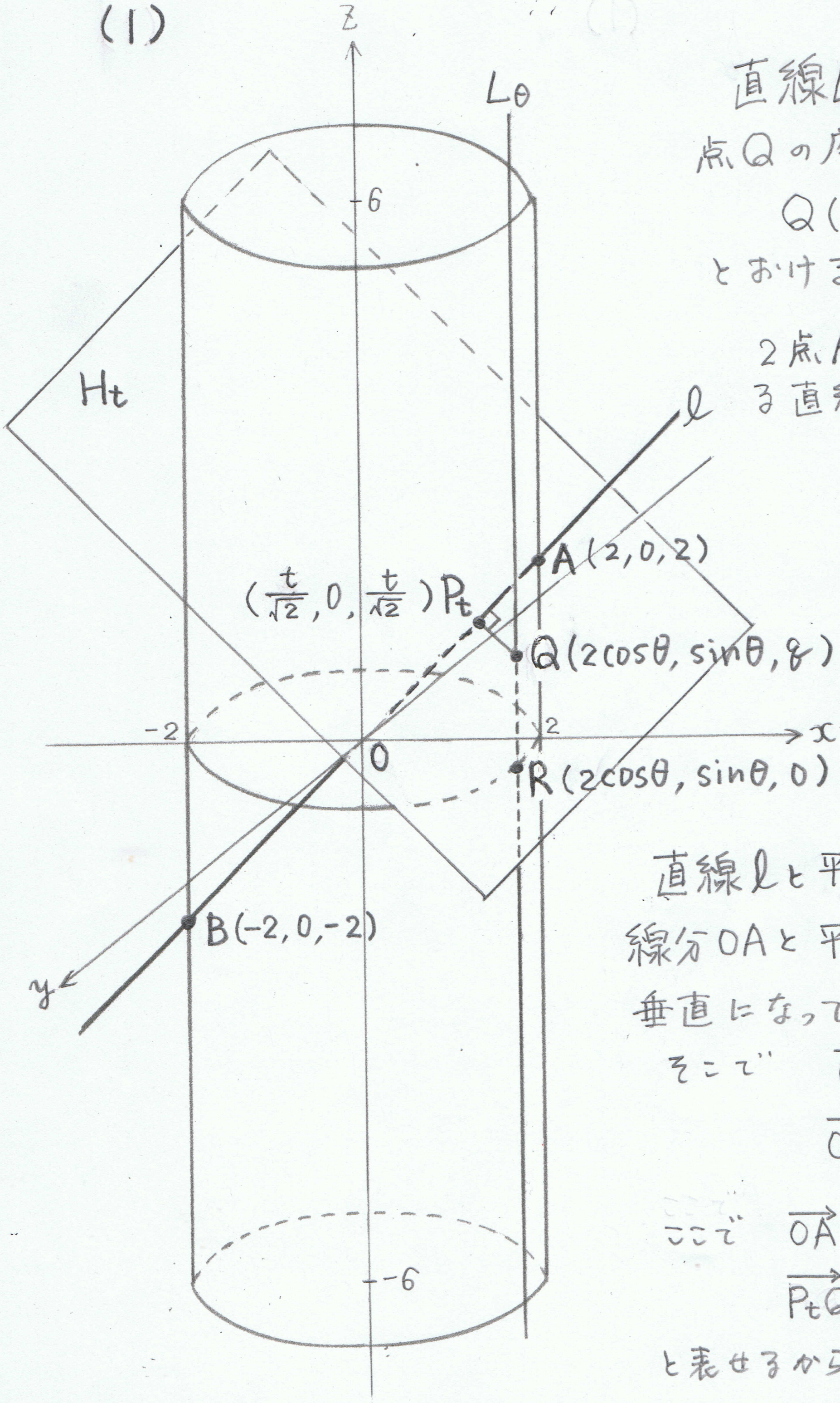
連立不等式

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leqq 1 \\ |z| \leqq 6 \end{cases} \quad |z| \leqq 6 \rightsquigarrow -6 \leqq z \leqq 6$$

これは右図のような楕円柱を表す。



(1)



直線L_θと平面H_tの交点をQとすると

点Qの座標はqを実数として

$Q(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ q)$

とおける。

2点A(2,0,2)，B(−2,0,−2)を通る直線lは原点Oも通っている。

直線lと平面H_tは垂直だから

線分OAと平面H_t上の線分P_tQは

垂直になっている。

そこで　$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{P_tQ}$　といえるから

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{P_tQ}=0$　となる。

ここで　$\overrightarrow{OA}=(2,0,2)$

$\overrightarrow{P_tQ}=(2\cos\theta-\frac{t}{\sqrt{2}},\ \sin\theta,\ q-\frac{t}{\sqrt{2}})$

と表せるから

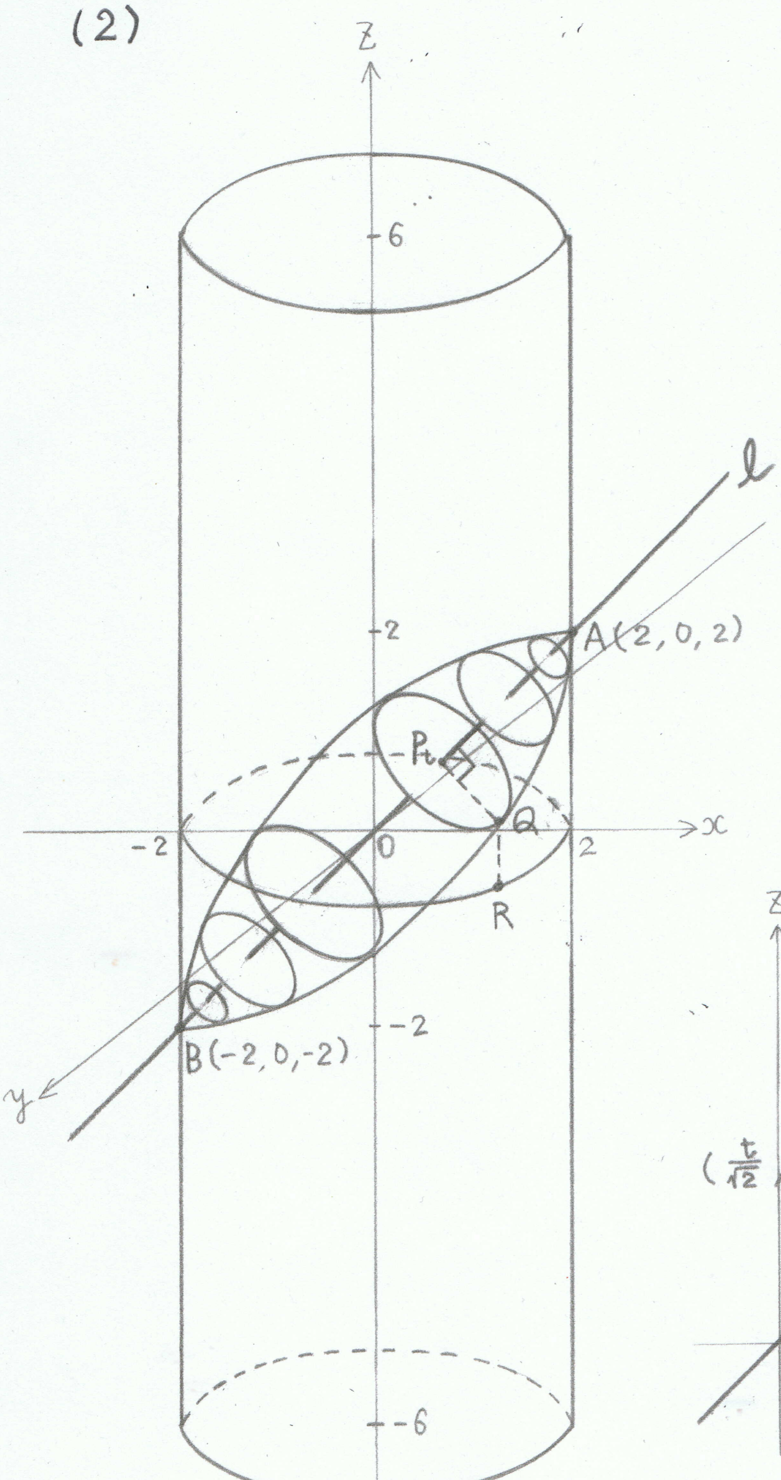
$2(2\cos\theta-\frac{t}{\sqrt{2}})+0\sin\theta+2(q-\frac{t}{\sqrt{2}})=0$　となる。

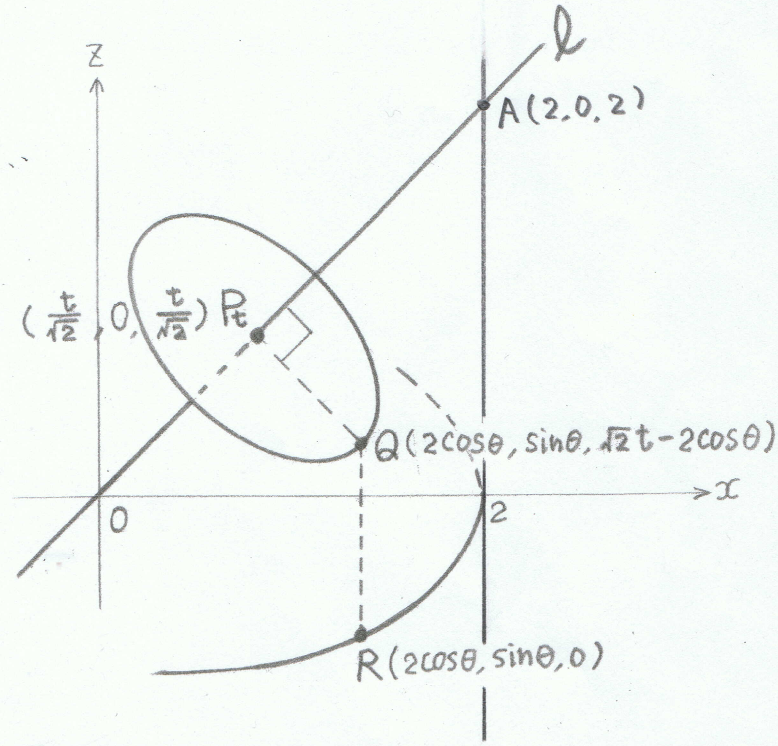
$4\cos\theta-\sqrt{2}t+2q-\sqrt{2}t=0$

$2q=2\sqrt{2}t-4\cos\theta$

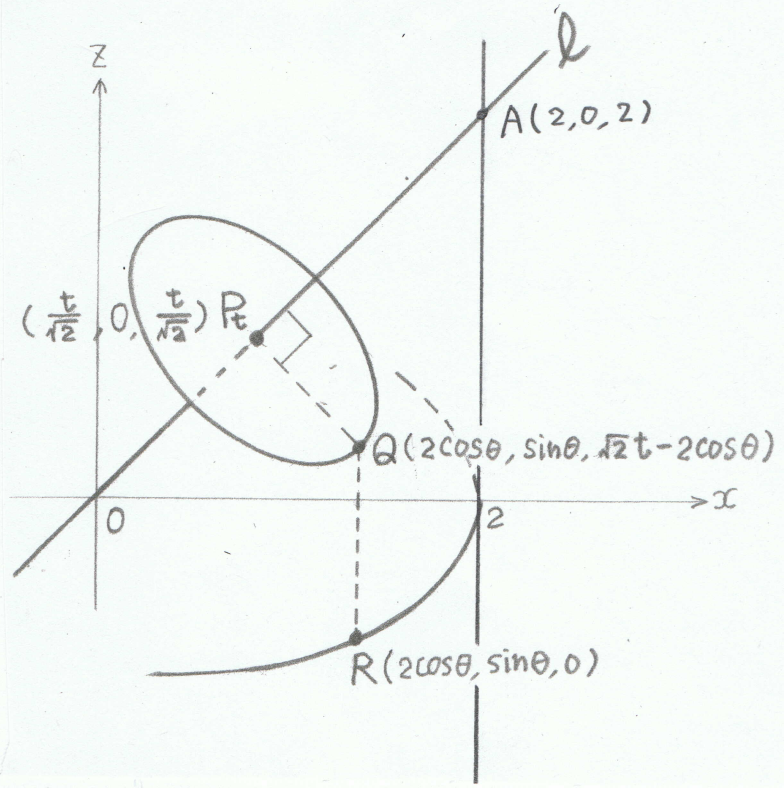
よって　$q=\sqrt{2}t-2\cos\theta$

(2)





ℓを軸とする回転体の体積が最大となるには、
点P_tを通りℓに垂直な平面H_t上において、
P_tから楕円柱の側面までの最短距離となる点をQとすると
線分P_tQがこの回転体のP_tにおける断面の半径となっていれば
良いことがわかる。
P_tから楕円柱のどの側面までが最短距離になるかを調べていく。



楕円柱の側面の位置は
θの関数であるから、
θに着目して、最短距離を
さがしてみる。

$$
\begin{aligned}
P_tQ^2 &= \left(2\cos\theta - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sin\theta - 0)^2 + \left(\sqrt{2}t - 2\cos\theta - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 \\
&= 4\cos^2\theta - 2\sqrt{2}t\cos\theta + \frac{t^2}{2} + \sin^2\theta + 2t^2 + 4\cos^2\theta + \frac{t^2}{2} \\
&\qquad - 4\sqrt{2}t\cos\theta + 2\sqrt{2}t\cos\theta - 2t^2 \\
&= 8\cos^2\theta - 4\sqrt{2}t\cos\theta + \sin^2\theta + t^2 \\
&= 8\cos^2\theta - 4\sqrt{2}t\cos\theta + 1 - \cos^2\theta + t^2 \\
&= 7\cos^2\theta - 4\sqrt{2}t\cos\theta + t^2 + 1 \\
&= 7\left(\cos^2\theta - \frac{4\sqrt{2}}{7}t\cos\theta\right) + t^2 + 1 \\
&= 7\left(\cos\theta - \frac{2\sqrt{2}}{7}t\right)^2 - \frac{8}{7}t^2 + t^2 + 1 \\
&= 7\left(\cos\theta - \frac{2\sqrt{2}}{7}t\right)^2 + 1 - \frac{t^2}{7}
\end{aligned}
$$

cosθに着目して
整頓していく。

ここで、$\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{7}t$ のとき P_tQ^2 は $1 - \frac{t^2}{7}$ の最小値をとるように思われる式が出てきたが、$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ という条件があるので、もう少し細かく見ていく。

$$P_tQ^2 = 7\left(\cos\theta - \frac{2\sqrt{2}}{7}t\right)^2 + 1 - \frac{t^2}{7} \quad \cdots\cdots ①$$

回転体の対称性により、$0 \leqq \cos\theta \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 2\sqrt{2}$ で考える。

$0 \leqq t \leqq 2\sqrt{2}$ より　$\frac{2\sqrt{2}}{7} \times 0 \leqq \frac{2\sqrt{2}}{7}t < \frac{2\sqrt{2}}{7} \times 2\sqrt{2}$

$$0 \leqq \frac{2\sqrt{2}}{7}t \leqq \frac{8}{7}$$

つまり　$0 \leqq \frac{2\sqrt{2}}{7}t \leqq 1 \leqq \frac{8}{7}$

このときのtの範囲は
$0 \leqq t \leqq \frac{7}{2\sqrt{2}}$
$0 \leqq t \leqq \frac{7\sqrt{2}}{4}$

すると、$0 \leqq \cos\theta \leqq 1$ のとき $0 \leqq \frac{2\sqrt{2}}{7}t \leqq 1$ であれば

①より、P_tQ^2 は $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{7}t$ で最小となり、最小値 $1 - \frac{t^2}{7}$ をとる。

では、$1 \leqq \frac{2\sqrt{2}}{7}t \leqq \frac{8}{7}$ のときはどのようになるのか？

そこで、t と $\cos\theta$ の値の変化を調べてみよう。

t	0	1	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{7\sqrt{2}}{4}$		$2\sqrt{2}$
$\frac{2\sqrt{2}}{7}t$	0	$\frac{2\sqrt{2}}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3\sqrt{2}}{7}$	$\frac{4\sqrt{2}}{7}$	1	$\cdots\cdots$	$\frac{8}{7}$
$\cos\theta$	0	$\frac{2\sqrt{2}}{7}$ 0.40	$\frac{4}{7}$ 0.57	$\frac{3\sqrt{2}}{7}$ 0.61	$\frac{4\sqrt{2}}{7}$ 0.81	1	$\cdots\cdots$	?

$t = 2\sqrt{2}$ のとき、つまり $\frac{2\sqrt{2}}{7}t = \frac{8}{7}$ のとき、

点 P_t は $\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 0, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$, つまり $P_t(2, 0, 2)$ となって 点 $A(2, 0, 2)$ と

一致しているから、点Qも当然に $Q(2, 0, 2)$ であるはずである。

そこで、(1)の結果 $z = \sqrt{2}t - 2\cos\theta$ より

$$2 = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} - 2\cos\theta$$
$$2\cos\theta = 4 - 2$$
$$2\cos\theta = 2$$

よって $\cos\theta = 1$ となるので、

このときのtの範囲は
$1 \times \frac{7}{2\sqrt{2}} \leqq t \leqq \frac{8}{7} \times \frac{7}{2\sqrt{2}}$
$\frac{7}{2\sqrt{2}} \leqq t \leqq \frac{4}{\sqrt{2}}$
$\frac{7\sqrt{2}}{4} \leqq t \leqq 2\sqrt{2}$

$1 \leqq \frac{2\sqrt{2}}{7}t \leqq \frac{8}{7}$ のときは、この区間でずっと $\cos\theta = 1$ であるということになるから、P_tQ^2 の最小値は

①式の $\cos\theta = 1$ として　$P_tQ^2 = 7\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{7}t\right)^2 + 1 - \frac{t^2}{7} = t^2 - 4\sqrt{2}t + 8 = (t - 2\sqrt{2})^2$

したがって P_tQ の最小値を $r(t)$ とすると

$$r(t)^2 = \begin{cases} 1-\dfrac{t^2}{7} & \left(0 \leqq \dfrac{2\sqrt{2}}{7}t \leqq 1 \text{ つまり } 0 \leqq t \leqq \dfrac{7\sqrt{2}}{4} \text{ のとき}\right) \\ (t-2\sqrt{2})^2 & \left(1 \leqq \dfrac{2\sqrt{2}}{7}t \leqq \dfrac{8}{7} \text{ つまり } \dfrac{7\sqrt{2}}{4} \leqq t \leqq 2\sqrt{2} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

すると 求める回転体の体積は

$$2\int_0^{2\sqrt{2}} \pi\, r(t)^2\, dt$$

$$= 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} r(t)^2\, dt$$

$$= 2\pi \left\{ \int_0^{\frac{7\sqrt{2}}{4}} \left(1-\frac{t^2}{7}\right) dt + \int_{\frac{7\sqrt{2}}{4}}^{2\sqrt{2}} (t-2\sqrt{2})^2\, dt \right\}$$

$$= 2\pi \left\{ \left[t - \frac{t^3}{21} \right]_0^{\frac{7\sqrt{2}}{4}} + \left[\frac{1}{3}(t-2\sqrt{2})^3 \right]_{\frac{7\sqrt{2}}{4}}^{2\sqrt{2}} \right\}$$

$$= 2\pi \left\{ \frac{7\sqrt{2}}{4} - \frac{49\sqrt{2}}{96} + 0 - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{32}\right) \right\}$$

$$= 2\pi \left(\frac{119\sqrt{2}}{96} + \frac{\sqrt{2}}{96} \right)$$

$$= 2\pi \times \frac{120\sqrt{2}}{96}$$

$$= 2\pi \times \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}\pi$$