5

xyz 空間内の一辺の長さが 1 の立方体

$$\{(x,\ y,\ z) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ \ 0 \leqq y \leqq 1,\ \ 0 \leqq z \leqq 1\}$$

を Q とする．点 X は頂点 A(0, 0, 0) から出発して Q の辺上を 1 秒ごとに長さ 1 だけ進んで隣の頂点に移動する．X が x 軸，y 軸，z 軸に平行に進む確率はそれぞれ p，q，r である．ただし

$$p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ r \geqq 0, \qquad p + q + r = 1$$

である．X が n 秒後に頂点 A(0, 0, 0)，B(1, 1, 0)，C(1, 0, 1)，D(0, 1, 1) にある確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n とする．

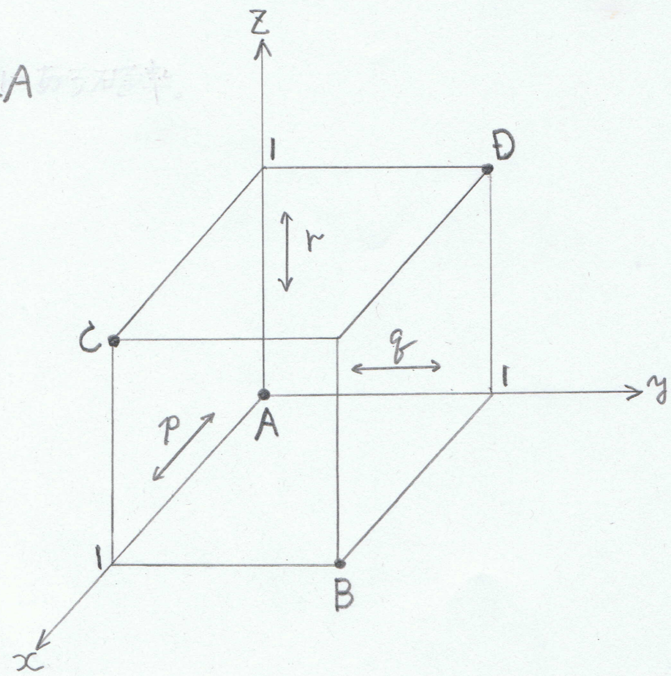
(1) a_{n+2} を a_n，b_n，c_n，d_n と p，q，r を用いて表せ．

(2) $a_n - b_n + c_n - d_n$ を p，q，r，n を用いて表せ．

(3) a_n を p，q，r，n を用いて表せ．

(1) n は 0以上の整数である。

a_{n+2} は 動点 X が $n+2$ 秒後に頂点 A にある確率である。



$$
\begin{aligned}
a_{n+2} &= a_n \times p^2 + a_n \times q^2 + a_n \times r^2 && \text{← X が } n \text{ 秒後に A にあるとき、次の2秒で A にくる確率} \\
&\quad + b_n \times p \times q + b_n \times q \times p && \text{← X が } n \text{ 秒後に B にあるとき、次の2秒で A にくる確率} \\
&\quad + c_n \times p \times r + c_n \times r \times p && \text{← X が } n \text{ 秒後に C にあるとき、次の2秒で A にくる確率} \\
&\quad + d_n \times q \times r + d_n \times r \times q && \text{← X が } n \text{ 秒後に D にあるとき、次の2秒で A にくる確率} \\
&= (p^2+q^2+r^2)a_n + 2pqb_n + 2rpc_n + 2qrd_n \quad \text{-----①}
\end{aligned}
$$

(2) (1) と同様にして、b_{n+2}, c_{n+2}, d_{n+2} を作ってみる。

$$b_{n+2} = 2pqa_n + (p^2+q^2+r^2)b_n + 2qrc_n + 2rpd_n \quad \text{-----②}$$

$$c_{n+2} = 2rpa_n + 2qrb_n + (p^2+q^2+r^2)c_n + 2pqd_n \quad \text{-----③}$$

$$d_{n+2} = 2qra_n + 2rpb_n + 2pqc_n + (p^2+q^2+r^2)d_n \quad \text{-----④}$$

①−②+③−④ を作ってみよう。 ← $a_n - b_n + c_n - d_n$ と同じ形を作ってみた。

$$
\begin{aligned}
& a_{n+2} - b_{n+2} + c_{n+2} - d_{n+2} \\
&= (p^2+q^2+r^2-2pq+2rp-2qr)a_n + (2pq-p^2-q^2-r^2+2qr-2rp)b_n \\
&\qquad + (2rp-2qr+p^2+q^2+r^2-2pq)c_n + (2qr-2rp+2pq-p^2-q^2-r^2)d_n \\
&= (p^2+q^2+r^2-2pq-2qr+2rp)a_n - (p^2+q^2+r^2-2pq-2qr+2rp)b_n \\
&\qquad + (p^2+q^2+r^2-2pq-2qr+2rp)c_n - (p^2+q^2+r^2-2pq-2qr+2rp)d_n \\
&= (p^2+q^2+r^2-2pq-2qr+2rp)(a_n-b_n+c_n-d_n) \\
&= (p-q+r)^2(a_n-b_n+c_n-d_n)
\end{aligned}
$$

つまり

$$a_{n+2}-b_{n+2}+c_{n+2}-d_{n+2}=(p-q+r)^2(a_n-b_n+c_n-d_n) \quad \text{-----⑤}$$

これは 第n項$(a_n-b_n+c_n-d_n)$に$(p-q+r)^2$をかけると

第$n+2$項$(a_{n+2}-b_{n+2}+c_{n+2}-d_{n+2})$が出てくるという漸化式を

表わしていることがわかる。

$$\text{--------},\ \underbrace{\quad}_{\times(p-q+r)^2} a_n-b_n+c_n-d_n,\ \underbrace{\quad}_{\times(p-q+r)^2} a_{n+2}-b_{n+2}+c_{n+2}-d_{n+2},\ \underbrace{\quad}_{\times(p-q+r)^2}\text{------}$$

そこで、初項つまり $n=0$ の項を求めてみよう。

$a_0=1$, $b_0=c_0=d_0=0$ ← 0秒のとき X が頂点Aにいる確率は1, 0秒のとき X が頂点B, C, Dにいる確率はそれぞれ0である。

だから $a_0-b_0+c_0-d_0=1-0+0-0=1$ となる

次に $n=1$ の項を求めてみよう。

$a_1=b_1=c_1=d_1=0$ ← X が頂点Aから出発して1秒後に、頂点A, B, C, Dにいる確率はそれぞれ0である。(1秒後に、A, B, C, Dのどこにもいない。)

だから $a_1-b_1+c_1-d_1=0-0+0-0=0$ となる。

この数列$\{a_n-b_n+c_n-d_n\}$は公比$(p-q+r)^2$をかけると2つ先の項が

出てくるので、nが奇数のときは、その先頭の項 $a_1-b_1+c_1-d_1$ が 0だから

これに公比$(p-q+r)^2$をかけても次の項 $a_3-b_3+c_3-d_3$ も 0となってしまう。

つまり nが奇数のときは全ての項が 0となってしまうことがわかる。

では、nが偶数のときはどうだろうか?

ここで $n=2l$ (lは0, 1, 2, 3, …)とおく。

$$\underbrace{\overset{n=0\text{項}}{a_0-b_0+c_0-d_0}}_{1},\ \overset{n=2\text{項}}{a_2-b_2+c_2-d_2},\ \overset{n=4\text{項}}{a_4-b_4+c_4-d_4},\ \text{-----------},\ \overset{n=n\text{項}}{a_{2l}-b_{2l}+c_{2l}-d_{2l}},\text{----}$$

$$\times(p-q+r)^2 \qquad \times(p-q+r)^2 \qquad \times(p-q+r)^2 \qquad \times(p-q+r)^2$$

$$a_{2l}-b_{2l}+c_{2l}-d_{2l}=1\times\{(p-q+r)^2\}^l$$ ← $l=0$で$n=0$項, $l=1$で$n=2$項, $l=2$で$n=4$項, …… が出てくる。

$n=2l$ より $l=\frac{n}{2}$ だから

$$a_n-b_n+c_n-d_n=1\times\{(p-q+r)^2\}^{\frac{n}{2}}=(p-q+r)^n \text{ となる。}$$

したがって $$a_n-b_n+c_n-d_n=\begin{cases}0 & (n\text{が奇数のとき})\\(p-q+r)^n & (n\text{が偶数のとき})\end{cases}$$

(3)

(2)で　nが偶数のとき　$a_n - b_n + c_n - d_n = (p-q+r)^n$ ----- ⑥

右辺は p, q, r, n の式となっている。

そこで　左辺の b_n, c_n, d_n を消去すれば、左辺は a_nだけ残って、目的が達成される。

つまり、右辺が p, q, r, n の式で、左辺が a_n, b_n, c_n, d_n の式となっているものを、いくつか作り、それを組み合わせて、左辺に a_n だけ残せばよいのではないかと考える。

(2)で、①, ②, ③, ④ を使って、⑥の式を作ったので、同じように、①～④を使って、⑥の式と同様なものをいくつか作って組み合せてみる。

まずはじめに思いつくのが、左辺が $a_n + b_n - c_n + d_n$ となる式を作ると、これだけで⑥の式とのたし算で左辺に $2a_n$のみ残ると考えるのだが、この式を作るには ①+②-③+④ から作り始めるのだが、この式を整頓したとき p, q, rを使った平方式で因数分解した式にしなければならない。→ $(p+q+r)^2$, $(p+q-r)^2$, $(-p+q+r)^2$ ... 公比の役目

⑤の形

しかし ①+②-③+④ では、p, q, rを使った平方式は作れない。

平方式を作るには ①, ②, ③, ④ をすべて＋でつなぐか、２か所に－を入れるしかない。

そこで、すべてを＋でつなぐか、２カ所に－を入れた式を作って、組合わせたときに、左辺に a_nのみ残すには、⑥の式の他に、

$a_n + b_n + c_n + d_n = \cdots$

$a_n + b_n - c_n - d_n = \cdots$

$a_n - b_n - c_n + d_n = \cdots$

を作って、この4式を全て加えると、左辺は $4a_n$となって、a_nの式のみ残る。

そこで

①＋②＋③＋④

①＋②－③－④

①－②－③＋④

を作って (2) と同様に進めていく。

①+②+③+④ は

$$a_{n+2}+b_{n+2}+c_{n+2}+d_{n+2}$$
$$=(p^2+q^2+r^2+2pq+2rp+2qr)a_n+(2pq+p^2+q^2+r^2+2qr+2rp)b_n$$
$$+(2rp+2qr+p^2+q^2+r^2+2pq)c_n+(2qr+2rp+2pq+p^2+r^2+q^2)d_n$$
$$=(p^2+q^2+r^2+2pq+2qr+2rp)(a_n+b_n+c_n+d_n)$$
$$=\underline{(p+q+r)^2}(a_n+b_n+c_n+d_n)$$

①+②−③−④ は

$$a_{n+2}+b_{n+2}-c_{n+2}-d_{n+2}$$
$$=(p^2+q^2+r^2+2pq-2rp-2qr)a_n+(2pq+p^2+q^2+r^2-2qr-2rp)b_n$$
$$+(2rp+2qr-p^2-q^2-r^2-2pq)c_n+(2qr+2rp-2pq-p^2-q^2-r^2)d_n$$
$$=(p^2+q^2+r^2+2pq-2qr-2rp)(a_n+b_n-c_n-d_n)$$
$$=\underline{(p+q-r)^2}(a_n+b_n-c_n-d_n)$$

①−②−③+④ は

$$a_{n+2}-b_{n+2}-c_{n+2}+d_{n+2}$$
$$=(p^2+q^2+r^2-2pq-2rp+2qr)a_n+(2pq-p^2-q^2-r^2-2qr+2rp)b_n$$
$$+(2rp-2qr-p^2-q^2-r^2+2pq)c_n+(2qr-2rp-2pq+p^2+q^2+r^2)d_n$$
$$=(p^2+q^2+r^2-2pq+2qr-2rp)(a_n-b_n-c_n+d_n)$$
$$=\underline{(-p+q+r)^2}(a_n-b_n-c_n+d_n)$$

ここで、3式とも公比をかけると2つ先の項が出てくることがわかる。

そしてやはり $n=0$の項はそれぞれ

$$a_0+b_0+c_0+d_0=1+0+0+0=1$$
$$a_0+b_0-c_0-d_0=1+0-0-0=1$$
$$a_0-b_0-c_0+d_0=1-0-0+0=1$$

a_0は1
b_0, c_0, d_0は0

$n=1$の項もそれぞれ

$$a_1+b_1+c_1+d_1=0+0+0+0=0$$
$$a_1+b_1-c_1-d_1=0+0-0-0=0$$
$$a_1-b_1-c_1+d_1=0-0-0+0=0$$

a_1, b_1, c_1, d_1は
全て0

だから nが奇数のときは

$$a_n+b_n+c_n+d_n=0$$
$$a_n+b_n-c_n-d_n=0$$
$$a_n-b_n-c_n+d_n=0$$

$p+q+r=1$

nが偶数のときは

$$a_n+b_n+c_n+d_n=1\times\{(p+q+r)^2\}^{\frac{n}{2}}$$
$$=1\times 1^n=1 \quad \text{------⑦}$$
$$a_n+b_n-c_n-d_n=1\times\{(p+q-r)^2\}^{\frac{n}{2}}$$
$$=(p+q-r)^n \quad \text{-----⑧}$$
$$a_n-b_n-c_n+d_n=1\times\{(-p+q+r)^2\}^{\frac{n}{2}}$$
$$=(-p+q+r)^n \quad \text{-----⑨}$$

$$\underbrace{\overset{n=0}{a_0+b_0+c_0+d_0}}_{1},\ \overset{n=2}{a_2+b_2+c_2+d_2},\ \overset{n=4}{a_4+b_4+c_4+d_4},\ \text{-----}$$
$$\times(p+q+r)^2 \qquad \times(p+q+r)^2 \qquad \times(p+q+r)^2$$

$n=2$のとき $a_2+b_2+c_2+d_2=1\times(p+q+r)^2$

$n=4$のとき $a_4+b_4+c_4+d_4=1\times\{(p+q+r)^2\}^2$

$n=6$のとき $a_6+b_6+c_6+d_6=1\times\{(p+q+r)^2\}^3$

$n=8$のとき $a_8+b_8+c_8+d_8=1\times\{(p+q+r)^2\}^4$

$n=n$のとき $a_n+b_n+c_n+d_n=1\times\{(p+q+r)^2\}^{\frac{n}{2}}$

そこで
nが偶数のときは、⑥+⑦+⑧+⑨を計算すると

$$
\begin{array}{rl}
a_n - b_n + c_n - d_n &= (p-q+r)^n \\
a_n + b_n + c_n + d_n &= 1 \\
a_n + b_n - c_n - d_n &= (p+q-r)^n \\
+)\quad a_n - b_n - c_n + d_n &= (-p+q+r)^n \\
\hline
4a_n &= 1 + (p-q+r)^n + (p+q-r)^n + (-p+q+r)^n
\end{array}
$$

すると $a_n = \frac{1}{4}\left\{1 + (p-q+r)^n + (p+q-r)^n + (-p+q+r)^n\right\}$

nが奇数のときは

$$
\begin{array}{rl}
a_n - b_n + c_n - d_n &= 0 \\
a_n + b_n + c_n + d_n &= 0 \\
a_n + b_n - c_n - d_n &= 0 \\
+)\quad a_n - b_n - c_n + d_n &= 0 \\
\hline
4a_n &= 0
\end{array}
$$

$\therefore a_n = 0$

したがって

nが奇数のとき　$a_n = 0$

nが偶数のとき

$$a_n = \frac{1}{4}\left\{1 + (p-q+r)^n + (p+q-r)^n + (-p+q+r)^n\right\}$$