第　1　問

正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える。

$$C: \quad y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ。

〔解説〕

aがいろいろな正の実数をとるとき、Cを満たす点(x, y)の範囲を図示すればよいのだから、aに着目して整頓してみる。

$$4(x^2-1)a^2-4ya+1=0 \quad \text{----} ①$$

これはaに関する方程式になっているので、

この方程式の解aが正の実数となるような(x, y)の条件を見つければよい。

この方程式を見ると、a^2の係数が0ならばaの1次方程式、

0でないならばaの2次方程式となることに気付く。

そこで、この2つの場合に分けて考えてみる。

(ア) a^2の係数 $4(x^2-1)=0$ つまり $x^2-1=0$, $x^2=1$, $x=\pm1$のとき

①はaの1次方程式 $-4ya+1=0$ である。

$4ya=1$ より

$y \neq 0$ のときは $a=\dfrac{1}{4y}$ と表せ、

aの解は必ず実数が1つのみ存在して

$y>0$ のときは aは必ず $a>0$

となることがわかる。

したがって

$x=\pm1$ のとき $y>0$ であればよい。-------- ②

(イ) a^2 の係数 $4(x^2-1) \neq 0$ のとき つまり $x^2-1>0$ または $x^2-1<0$ のとき、①は a の2次方程式である。

まず a が実数解を持つのは、判別式 $\geqq 0$ が成り立つときだから

$$\frac{D}{4} = (-2y)^2 - 4(x^2-1)\cdot 1 \geqq 0$$
$$4y^2 - 4x^2 + 4 \geqq 0$$
$$y^2 - x^2 + 1 \geqq 0$$
$$\therefore\ x^2 - y^2 \leqq 1 \quad \text{------ ③}$$

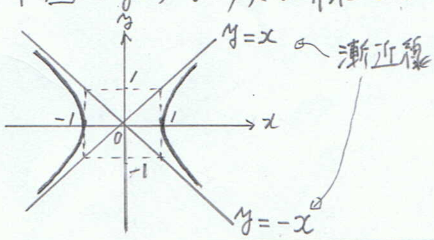
2次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a \neq 0)$ の判別式 $D=b^2-4ac$

$D>0 \iff$ 異なる2つの実数解

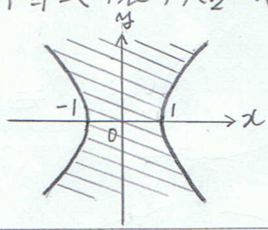
$D=0 \iff$ 1つの実数解(重解)

$D<0 \iff$ 異なる2つの虚数解

ちなみに $x^2-y^2=1$ つまり $\dfrac{x^2}{1^2}-\dfrac{y^2}{1^2}=1$ は下図のような双曲線を表す。



③の不等式の表す領域は斜線部。



次に a の実数解を α, β とおくと解と係数の関係より

$$\alpha+\beta = -\frac{-4y}{4(x^2-1)} = \frac{y}{x^2-1}$$
$$\alpha\beta = \frac{1}{4(x^2-1)}$$

2次方程式の解と係数の関係

$ax^2+bx+c=0\ (a \neq 0)$ の解を α, β とすると

$\alpha+\beta = -\dfrac{b}{a}$

$\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

(i) α と β が共に正の実数のときは

$\alpha\beta>0$ となるから $\dfrac{1}{4(x^2-1)}>0$ となる。

だから $x^2-1>0$ となる。

そして $\alpha+\beta>0$ ともなるから $\dfrac{y}{x^2-1}>0$ となる。

ここで $x^2-1>0$ だから $y>0$ となる。

つまり、$x^2-1>0$ のとき $y>0$ であればよい。------ ④

(ii) α と β が異符号、つまり α, β の一方が正の実数のとき

$\alpha\beta<0$ となるから $\dfrac{1}{4(x^2-1)}<0$ となる。

だから $x^2-1<0$ となる。

$\alpha+\beta$ は正、負、0のどれにもなるから

$\dfrac{y}{x^2-1}$ は正、負、0のどれでもよいから

y は任意の実数でよい。

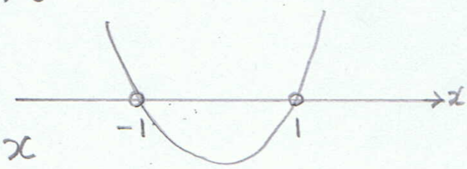
つまり、$x^2-1<0$ のとき y は任意の実数でよい。---- ⑤

2次不等式の解

$x^2-1>0$

$(x+1)(x-1)>0$

$\therefore\ x<-1,\ 1<x$



$x^2-1<0$

$(x+1)(x-1)<0$

$\therefore\ -1<x<1$

以上（ア）（イ）をまとめると

①が正の実数解をもつのは

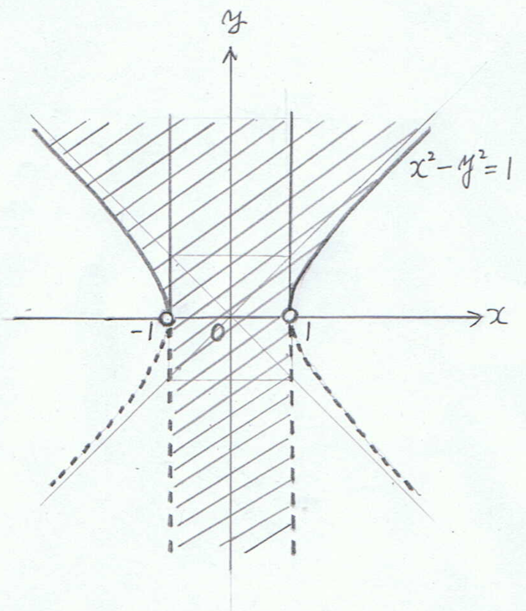
②より　$x=\pm 1$ で $y>0$ のとき。

③,④,⑤より

$x^2-y^2 \leqq 1$ かつ　$x<-1,\ 1<x$ で $y>0$ のとき。

$x^2-y^2 \leqq 1$ かつ　$-1<x<1$ で y が任意実数のとき。

求める領域は下図斜線部となる。



境界線上は $y>0$ の部分は含み，

$y \leqq 0$ の部分は含まない。