第　1　問

以下の命題 A，B それぞれに対し，その真偽を述べよ。また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ。

命題 A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ が成り立つ。

命題 B　整数 n，m，ℓ が $5n+5m+3\ell=1$ をみたすならば，$10nm+3m\ell+3n\ell<0$ が成り立つ。

［解説］

命題A：

$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ を証明するには

$\dfrac{n^3}{26}+100-n^2 \geqq 0$ を証明すればよい。

そこで n のかわりに実数 x の不等式とみて、証明していく。

$f(x)=\dfrac{x^3}{26}+100-x^2 \quad (x>0)$ とおく。

$f'(x)=\dfrac{3}{26}x^2-2x=\dfrac{3}{26}x\left(x-\dfrac{52}{3}\right)$

$f'(x)=0$ となるのは $x>0$ より $x=\dfrac{52}{3}$

増減表をつくると

x	0		$\frac{52}{3}$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

$17<\dfrac{52}{3}<18$ だから x が整数ならば $x=17$ か 18 で $f(x)$ は最小となる。

$f(17)=\dfrac{17^3}{26}+100-17^2=\dfrac{4913}{26}+100-289=-\dfrac{1}{26}<0$

$f(18)=\dfrac{18^3}{26}+100-18^2=\dfrac{5832}{26}+100-324=\dfrac{8}{26}=\dfrac{4}{13}$

したがって $n=17$ のとき 命題が成り立たないことを表す。

ゆえに 命題Aは偽である。

反例は $n=17$ である。

命題B：

$$5n+5m+3l=1 \quad \cdots\cdots ①$$
$$10nm+3ml+3nl<0 \quad \cdots\cdots ②$$

①と②を比べると $3l$ があるから

① より $3l=1-5n-5m \quad \cdots\cdots ①'$

② の左辺より
$$\begin{aligned}
&10nm+3ml+3nl \\
&=10nm+3l(m+n) \\
&=10nm+(1-5n-5m)(m+n) \\
&=10nm+m-5nm-5m^2+n-5n^2-5nm \\
&=-5n^2+n-5m^2+m \\
&=-5\left(n^2-\tfrac{1}{5}n\right)-5\left(m^2-\tfrac{1}{5}m\right) \\
&=-5\left(n^2-\tfrac{1}{5}n+\tfrac{1}{100}-\tfrac{1}{100}\right)-5\left(m^2-\tfrac{1}{5}m+\tfrac{1}{100}-\tfrac{1}{100}\right) \\
&=-5\left(n-\tfrac{1}{10}\right)^2-5\left(m-\tfrac{1}{10}\right)^2+\tfrac{1}{20}+\tfrac{1}{20} \\
&=-5\left(n-\tfrac{1}{10}\right)^2-5\left(m-\tfrac{1}{10}\right)^2+\tfrac{1}{10}
\end{aligned}$$

とりあえず平方完成してみる。

ここで $\left(n-\frac{1}{10}\right)^2 \geqq \frac{1}{100}$, $\left(m-\frac{1}{10}\right)^2 \geqq \frac{1}{100}$ であることがわかる。

等号成立は $n=m=0$ のときであるが、

このとき ①' より $3l=1$ となって l は整数とならない。

そこで $\left(n-\frac{1}{10}\right)^2 > \frac{1}{100}$, $\left(m-\frac{1}{10}\right) > \frac{1}{100}$ であることになる。

すると $\left(n-\frac{1}{10}\right)^2+\left(m-\frac{1}{10}\right)^2 > \frac{1}{100}+\frac{1}{100}$

$$\left(n-\frac{1}{10}\right)^2+\left(m-\frac{1}{10}\right)^2 > \frac{1}{50}$$

両辺に -5 をかけると

$$-5\left(n-\frac{1}{10}\right)^2-5\left(m-\frac{1}{10}\right)^2 < -\frac{1}{10}$$

両辺に $\frac{1}{10}$ を加えると

$$-5\left(n-\frac{1}{10}\right)^2-5\left(m-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{10} < 0$$

よって $10nm+3ml+3nl<0$

$m=n=0$ は当然満たさない。

したがって n, m, l が整数で、かつ $5n+5m+3l=1$ を満たすなら、
$10nm+3ml+3nl<0$ が成り立つ。

ゆえに 命題B は真である。