第　2　問

どの目も出る確率が $\frac{1}{6}$ のさいころを1つ用意し，次のように左から順に文字を書く。

さいころを投げ，出た目が 1，2，3 のときは文字列 A A を書き，4 のときは文字 B を，5 のときは文字 C を，6 のときは文字 D を書く。さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，A A，B，C，D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば，さいころを 5 回投げ，その出た目が順に 2，5，6，3，4 であったとすると，得られる文字列は，

A A C D A A B

となる。このとき，左から 4 番目の文字は D，5 番目の文字は A である。

(1) n を正の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

［解説］

(1)　確率の漸化式を作ってみます。

文字列AAは、左右を区別して A_1A_2 としておきます。

n 回サイコロを投げたとき、n 番目の文字が

A_1 となる確率を p_n

A_2 となる確率を q_n

BまたはCまたはDとなる確率を r_n

とおく。

数列の漸化式の例

- 初項 a_1，公差 d の等差数列 $a_{n+1}=a_n+d$ $(n=1,2,\cdots)$
- 初項 a_1，公比 r の等比数列 $a_{n+1}=ra_n$ $(n=1,2,\cdots)$

最初に1回投げたとき、1番目の文字が

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \text{となる確率 } p_1=\frac{1}{2} \\ A_2 \text{となる確率 } q_1=0 \\ \text{BまたはCまたはDとなる確率 } r_1=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{------}①$$

は、すぐにわかる。（これからは、BまたはCまたはDを B,C,D と書くことにする。）

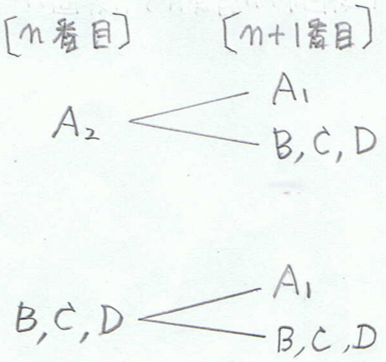
A_1 と A_2 は常に並べて書かれるのでお互いに関係があるはずだ。

A_1 と A_2 はいっしょにくっついているから
n 番目が A_1 となったとき、このとき同時に
$n+1$ 番目は A_2 になっている。

$$q_{n+1}=p_n \text{ ------------- } ②$$

となることがわかる。

更に、いろいろな場合の n 番目と $n+1$ 番目の関係を調べてみよう。



左図のように

n 回投げて n 番目の文字が A_2 のとき、
次の $n+1$ 番目の文字は、
A_1 か B,C,D のどれかである。

また、n 回投げて n 番目の文字が
B,C,D のどれかのとき、
次の $n+1$ 番の文字は
やはり A_1 か B,C,D のどれか
である。

[n番目]　　　[$n+1$番目]

A_2（確率 q_n）$\xrightarrow{\times\frac{1}{2}}$ A_1 ---この確率は $q_n \times \frac{1}{2}$

A_2（確率 q_n）$\xrightarrow{\times\frac{1}{2}}$ B, C, D ---この確率は $q_n \times \frac{1}{2}$

B, C, D（確率 r_n）$\xrightarrow{\times\frac{1}{2}}$ A_1 ---この確率は $r_n \times \frac{1}{2}$

B, C, D（確率 r_n）$\xrightarrow{\times\frac{1}{2}}$ B, C, D ---この確率は $r_n \times \frac{1}{2}$

確率の乗法定理

互いに独立な試行 S, T があり
S で事象 A が起こる確率を p_1，
T で事象 B が起こる確率を p_2
とするとき、
A が起こり，B が起こる確率 p は

$$p = p_1 \times p_2$$

$\times \frac{1}{2}$ とは

単にサイコロを１回投げたとき、　１か２か３の目が出て，AAを書く確率は $\frac{1}{2}$
４か５か６の目が出て、BかCかDを書く確率も $\frac{1}{2}$

そこで、確率の加法定理より

$n+1$ 回投げて $n+1$ 番目が A_1 となる確率 p_{n+1} は

$$p_{n+1} = q_n \times \frac{1}{2} + r_n \times \frac{1}{2}$$

つまり　$p_{n+1} = \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{2} r_n$ ---③

確率の加法定理

２つの事象 A, B が同時に起こり得ないとき
A, B の起こる確率をそれぞれ p_1, p_2 とするとき
A または B の起こる確率 p は　$p = p_1 + p_2$

また、$n+1$ 回投げて $n+1$ 番目が B または C または D となる確率 r_{n+1} は

$$r_{n+1} = q_n \times \frac{1}{2} + r_n \times \frac{1}{2}$$

つまり　$r_{n+1} = \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{2} r_n$ ---④

となる。

そして、p_n，q_n，r_n の関係は

当然、　$p_n + q_n + r_n = 1$ ----⑤

である。

全事象の確率

n 回サイコロを投げたとき、
n 番目の文字は

- A_1 となる
- A_2 となる
- B または C または D となる

のどれかが必ず起きるのだから、
これらの確率をたせば必ず１になる。

ここまでで作った式①〜⑤は、確率に関しての漸化式である。
数列で学んだ漸化式と同様の方法で、これらの式を使って
n 番目の文字が A となる確率 p_n+q_n を n の式で表わしていく。

まず③より　$p_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n=\frac{1}{2}(q_n+r_n)$

ここで⑤より　$q_n+r_n=1-p_n$ だから

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}(1-p_n)$$

(　)をはずすと　$p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}$ ---㋐

この式に対して　$\alpha=-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}$ ---㋑

となる数 α を考えると、㋐−㋑から次の等式が得られる

$$p_{n+1}-\alpha=-\frac{1}{2}(p_n-\alpha) \text{ ---㋒}$$

㋑を解くと　$\alpha+\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}$

$$\frac{3}{2}\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha=\frac{1}{3}$$

したがって㋒は

初項	第2項	第3項		第 n 項
$p_1-\frac{1}{3}$,	$p_2-\frac{1}{3}$,	$p_3-\frac{1}{3}$,	----,	$p_n-\frac{1}{3}$
$\times\left(-\frac{1}{2}\right)$	〃	〃	〃	

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$$

となる。

①より

これは、初項 $p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

公比 $-\frac{1}{2}$

の等比数列 $\left\{p_n-\frac{1}{3}\right\}$ である。

等比数列の一般項

初項 a, 公比 r
の等比数列の第 n 項 a_n は
$a_n=ar^{n-1}$

第 n 項は

$$p_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$p_n=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

$$=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{1}{3}$$

(2)でも使う

また、②より　$q_n=p_{n-1}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$ -------- ※

したがって　n 番目の文字が A となる確率は

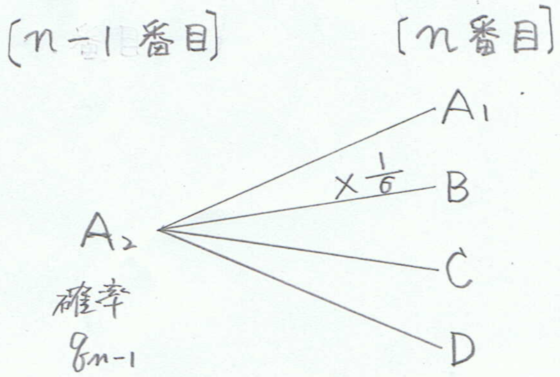
$$p_n+q_n=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

$$=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}$$

$$=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

(2)　$n-1$番目がAで，かつn番目がBとなるのは，
$n-1$番目がA_2で，かつn番目がBとなる場合なので，
下図のようになる．



サイコロを1回投げたとき
4の目が出る確率は
$\frac{1}{6}$

求める確率は

$$q_{n-1}\times\frac{1}{6}=\left\{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\frac{1}{3}\right\}\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{18}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$$

②より
$q_{n+1}=p_n$ だから
$q_n=p_{n-1}$
$q_{n-1}=p_{n-2}$

(1)の※より
$$q_n=p_{n-1}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$
だから
$$q_{n-1}=p_{n-2}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\frac{1}{3}$$