第　2　問

座標平面上の 2 点 A$(-1,\ 1)$，B$(1,\ -1)$ を考える。また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする。次の条件 (i) または (ii) をみたす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ。

(i) 頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで，点 A，P，B をすべて通るものがある。

(ii) 点 A，P，B は同一直線上にある。

[解説]

(i) より 2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。

点A$(-1,1)$を通るから $1=a-b+c$ ---①

点B$(1,-1)$を通るから $-1=a+b+c$ ---②

①−② より $2=-2b$ $\therefore b=-1$

①＋② より $0=2a+2c$ $\therefore c=-a$

よって 2次関数は $y=ax^2-x-a$ ----③

とおける。

③より
$$
\begin{aligned}
y&=ax^2-x-a\\
&=a\left(x^2-\frac{1}{a}x\right)-a\\
&=a\left(x^2-\frac{1}{a}x+\frac{1}{4a^2}\right)-\frac{1}{4a}-a\\
&=a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2-\left(\frac{1}{4a}+a\right)
\end{aligned}
$$

2次関数の頂点のx座標の絶対値が1以上なので

$\left|\frac{1}{2a}\right|\geqq 1$ より

$\frac{1}{2a}\leqq -1$, $1\leqq\frac{1}{2a}$

$\frac{1}{a}\leqq -2$ | $2\leqq\frac{1}{a}$

$\therefore a\geqq -\frac{1}{2}$ | $\therefore \frac{1}{2}\geqq a$

ここで $a=0$のとき ③は 1次関数 $y=-x$ となり、これは2点A, Bを通る直線であるから、点Pが線分AB上にあれば、(ii)を満たし、$-1\leqq x\leqq 1$ となる。

$a\neq 0$のとき ③は 2次関数を表し、頂点のx座標の絶対値が1以上なので、aの範囲は

$$-\frac{1}{2}\leqq a<0\ ,\ 0\leqq a<\frac{1}{2} \quad ----④$$

となる。

また、点Pのx座標の絶対値が1以下であるから

$|x|\leqq 1$ より

$$-1\leqq x\leqq 1 \quad ---------⑤$$

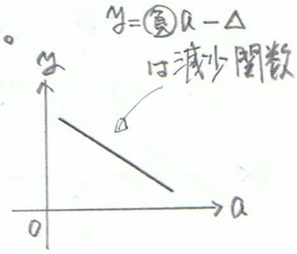
となる。

そして　2次関数 $y=ax^2-x-a$ ……③ のグラフにおいて
④, ⑤ の両方を満たす領域が点Pの存在する範囲になる。

そこで、まず a に着目して整頓してみると

$$y=(x^2-1)a-x \text{ ------------ ③'}$$

これは a に着目すると、a の1次関数になっている。
a の係数 x^2-1 の x には $-1 \leqq x \leqq 1$ の値が入るが、
$x=\pm 1$ のときは ③' は点A, Bを表すことがわかる。
$x \neq \pm 1$ のときは、a の係数 x^2-1 は負となることがわかる。
すると、x に $-1<x<1$ のどんな値が入ろうと、
この1次関数の a の係数はいつも負だから
a の値が増加すると、y の値は減少することがわかる。



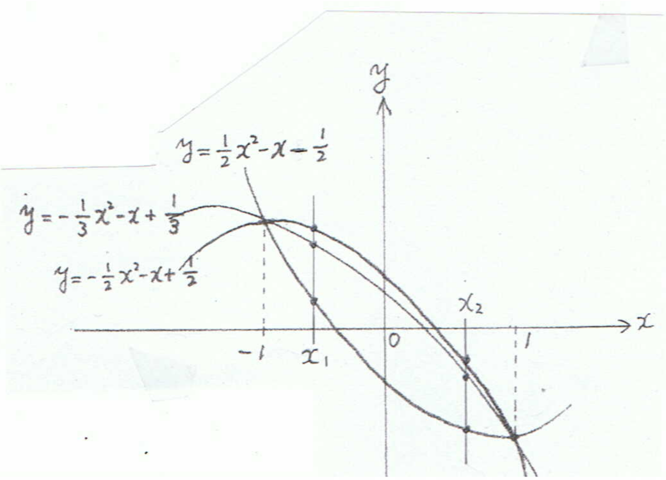
ここで実際に③'に数値を代入して確認してみよう。

aの値増加 ↓

aの値 \ xの値	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{31}{32}$ 0.96	$\frac{23}{32}$ 0.71	$\frac{1}{2}$ 0.50	$\frac{7}{32}$ 0.21	$-\frac{17}{32}$ −0.53
$-\frac{1}{3}$	$\frac{43}{48}$ 0.89	$\frac{9}{16}$ 0.56	$\frac{1}{3}$ 0.33	$\frac{1}{16}$ 0.06	$-\frac{29}{48}$ −0.60
$\frac{1}{3}$	$\frac{29}{48}$ 0.60	$-\frac{1}{16}$ −0.06	$-\frac{1}{3}$ −0.33	$-\frac{9}{16}$ −0.56	$-\frac{43}{48}$ −0.89
$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{32}$ 0.53	$-\frac{7}{32}$ −0.21	$-\frac{1}{2}$ −0.50	$-\frac{23}{32}$ −0.71	$-\frac{31}{32}$ −0.96

yの値減少 ↓

上の表のように、③' は $-1<x<1$ のどんな x の値をとったときでも
　a が最小値 $-\frac{1}{2}$ ならば y はいつも最大となり
　a が最大値 $\frac{1}{2}$ ならば y はいつも最小となる。



左図は
$a=-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ のときの③のグラフでの
$-1 \leqq x \leqq 1$ 内の x_1, x_2 における y の値の比較である。
これを見ると、$-1 \leqq x \leqq 1$ 内のどんな x の値のときも、y の値は $a=-\frac{1}{2}$ のときが最大で、$a=-\frac{1}{2}$ のときが最小となるということがわかると思う。

そこで ③より

$a=-\frac{1}{2}$ のとき $y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$ ---- ⑥

$a=\frac{1}{2}$ のとき $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}$ ---- ⑦

$-1 \leqq x \leqq 1$ に対して yの範囲は、上限が⑥で、下限が⑦

となり、この中に点Pが存在することになる。

もちろん、

$x=\pm 1$のときは

⑥,⑦ともに点A,Bを表し、

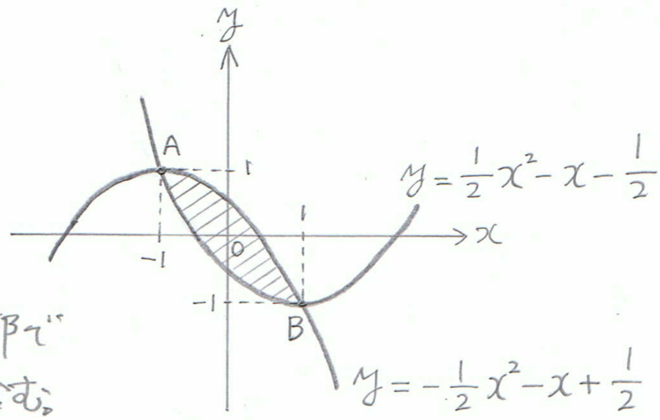
当然、点Pも、そこに

存在する。

点Pの範囲は

右図斜線部で

境界線を含む。



求める面積は

$$\int_{-1}^{1}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}$$

$$=-\frac{1}{3}+1-\left(\frac{1}{3}-1\right)$$

$$=\frac{4}{3}$$