第　3　問

a を正の実数とし，p を正の有理数とする。

座標平面上の２つの曲線 $y = ax^p \ (x > 0)$ と $y = \log x \ (x > 0)$ を考える。この２つの曲線の共有点が１点のみであるとし，その共有点を Q とする。

以下の問いに答えよ。必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x} = \infty$ を証明なしに用いてよい。

(1) a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ。

(2) この２つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに１回転してできる立体の体積を p を用いて表せ。

(3) (2) で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ。

［解説］

(1) $x>0$ で $\begin{cases} y=ax^p & \cdots ① \\ y=\log x & \cdots ② \end{cases}$

考え方

①と②の共有点が1点のみ

⇓

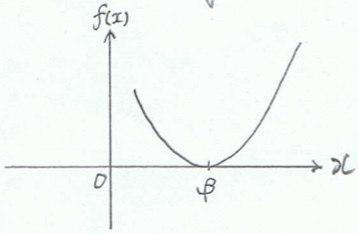
xの方程式 $ax^p=\log x$ の解が1つ（これを $x=\beta$ とする。）

⇓

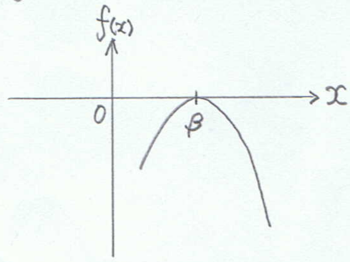
xの方程式 $ax^p-\log x=0$ の解が1つ $(x=\beta)$

⇓

$f(x)=ax^p-\log x$ とおいたとき、関数 $f(x)$ のグラフが下図の形になる。



または



$f(x)=ax^p-\log x$ とおくと

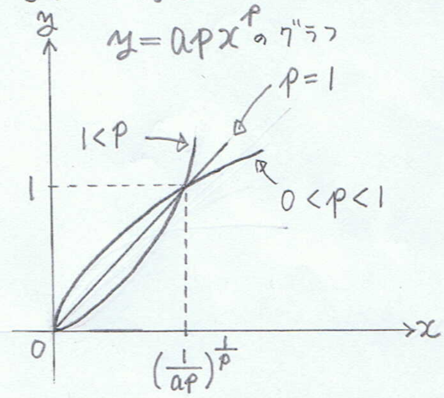
$$f'(x)=apx^{p-1}-\frac{1}{x}=\frac{apx^p-1}{x}$$

ここで $f'(x)=0$ とすると $\dfrac{apx^p-1}{x}=0$

$$apx^p-1=0$$
$$apx^p=1$$
$$x^p=\frac{1}{ap}$$
$$\therefore\ x=\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$f'(x)$の符号を調べる準備

$y=apx^p$ のグラフ



x	0		$\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

よって、$f(x)$の増減表は右表のようになり、

そして、$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}(ax^p-\log x)=\infty$

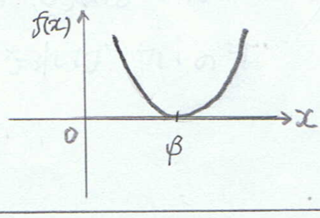
$\displaystyle\lim_{x\to+0}ax^p=0$, $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log x=-\infty$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(ax^p-\log x)=\lim_{x\to\infty}\left(a\cdot\frac{x^p}{\log x}-1\right)\log x$$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x}=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log x=\infty$ だから

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

したがって $f(x)=ax^p-\log x$ のグラフは右図の形だということがわかる。



$x>0$ で $y=ax^p$ と $y=\log x$ の共有点が1点のみとなるのは
$x>0$ における $f(x)=0$ の解がただ1つのみとなればよいので
増減表より　$f\left(\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}\right)=0$ のときとなる。

そこで

$$f\left(\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}\right)=0 \text{ より}$$

$$a\left\{\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}^p-\log\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}=0$$

$$a\cdot\frac{1}{ap}-\frac{1}{p}\log\frac{1}{ap}=0$$

$$\frac{1}{p}\left(1-\log\frac{1}{ap}\right)=0$$

$p>0$ だから　$1-\log\frac{1}{ap}=0$

$$\log\frac{1}{ap}=1$$

$$\frac{1}{ap}=e$$

$$\frac{1}{a}=ep$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{ep}$$

指数法則

$$a^m a^n=a^{m+n}$$
$$(a^m)^n=a^{mn}$$
$$(ab)^n=a^n b^n$$

指数の拡張

$$a^0=1$$
$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$
$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

このとき 共有点Qの x 座標は

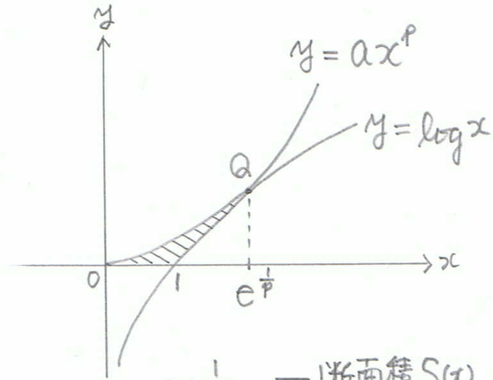
$$x=\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{1}{\frac{1}{ep}\cdot p}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{1}{\frac{1}{e}}\right)^{\frac{1}{p}}=e^{\frac{1}{p}}$$

対数の性質　$a>0,\ a\neq1,\ m>0,\ n>0$

$$\log_a 1=0 \qquad \log_a a=1$$
$$\log_a mn=\log_a m+\log_a n$$
$$\log_a \frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$$
$$\log_a m^p=p\log_a m$$
$$\log_a m=\frac{\log_b m}{\log_b a}\quad(b>0,\ b\neq1)$$

(2) 求める体積をVとすると

$$V=\pi\int_0^{e^{\frac{1}{p}}}(ax^p)^2dx-\pi\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}(\log x)^2dx$$



ここで

$$\int_0^{e^{\frac{1}{p}}}(ax^p)^2dx=\int_0^{e^{\frac{1}{p}}}a^2x^{2p}dx=a^2\left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1}\right]_0^{e^{\frac{1}{p}}}$$

$$=a^2\left\{\frac{(e^{\frac{1}{p}})^{2p+1}}{2p+1}-0\right\}=a^2\cdot\frac{e^{2+\frac{1}{p}}}{2p+1}=\left(\frac{1}{ep}\right)^2\cdot\frac{e^{2+\frac{1}{p}}}{2p+1}$$

$a=\frac{1}{ep}$ だから

断面積S(x)と立体の体積V
$$\boxed{V=\int_a^b S(x)dx}$$

$$=\frac{1}{e^2p^2}\cdot\frac{e^{2+\frac{1}{p}}}{2p+1}=\frac{e^{-2}\cdot e^{2+\frac{1}{p}}}{p^2(2p+1)}=\frac{e^{\frac{1}{p}}}{p^2(2p+1)}$$

$$\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}(\log x)^2dx=\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}\underbrace{1}_{g'}\cdot\underbrace{(\log x)^2}_{f}dx=\left[\underbrace{x}_{g}\underbrace{(\log x)^2}_{f}\right]_1^{e^{\frac{1}{p}}}-\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}\underbrace{x}_{g}\cdot\underbrace{2\log x\cdot\frac{1}{x}}_{f'}dx$$

$$=e^{\frac{1}{p}}(\log e^{\frac{1}{p}})^2-0-2\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}\log x\,dx$$

部分積分法
$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx}$$

$$=e^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\frac{1}{p}\log e\right)^2-2\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}\underbrace{1}_{g'}\cdot\underbrace{\log x}_{f}dx$$

合成関数微分法
$$\boxed{\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)}$$

$$=e^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^2-2\left\{\Big[x\log x\Big]_1^{e^{\frac{1}{p}}}-\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}x\cdot\frac{1}{x}dx\right\}$$

$$=e^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{p^2}-2\left\{e^{\frac{1}{p}}\log e^{\frac{1}{p}}-0-\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}1\,dx\right\}$$

$$=e^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{p^2}-2\left\{e^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{p}\log e-\Big[x\Big]_1^{e^{\frac{1}{p}}}\right\}$$

$$=e^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{p^2}-2\left\{e^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{p}-(e^{\frac{1}{p}}-1)\right\}=e^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{p^2}-2e^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{p}+2e^{\frac{1}{p}}-2$$

よって

$$V=\pi\cdot\frac{e^{\frac{1}{p}}}{p^2(2p+1)}-\pi\left(e^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{p^2}-2e^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{p}+2e^{\frac{1}{p}}-2\right)$$

$$=\pi\left\{\frac{e^{\frac{1}{p}}}{p^2(2p+1)}-\frac{e^{\frac{1}{p}}}{p^2}+\frac{2e^{\frac{1}{p}}}{p}-2e^{\frac{1}{p}}+2\right\}$$

$$=\pi\left\{\frac{1-(2p+1)+2p(2p+1)-2p^2(2p+1)}{p^2(2p+1)}\cdot e^{\frac{1}{p}}+2\right\}$$

$$=\pi\left\{\frac{1-2p-1+4p^2+2p-4p^3-2p^2}{p^2(2p+1)}e^{\frac{1}{p}}+2\right\}$$

$$=\pi\left\{\frac{2p^2-4p^3}{p^2(2p+1)}e^{\frac{1}{p}}+2\right\}=\pi\left\{\frac{2p^2(1-2p)}{p^2(2p+1)}e^{\frac{1}{p}}+2\right\}=\pi\left(\frac{2-4p}{1+2p}e^{\frac{1}{p}}+2\right)$$

(3) $\pi\left(\frac{2-4p}{1+2p}e^{\frac{1}{p}}+2\right)=2\pi$ より $\frac{2-4p}{1+2p}e^{\frac{1}{p}}=0$

$p>0$, $e^{\frac{1}{p}}>0$ だから $2-4p=0$ $\therefore p=\frac{1}{2}$