第　3　問

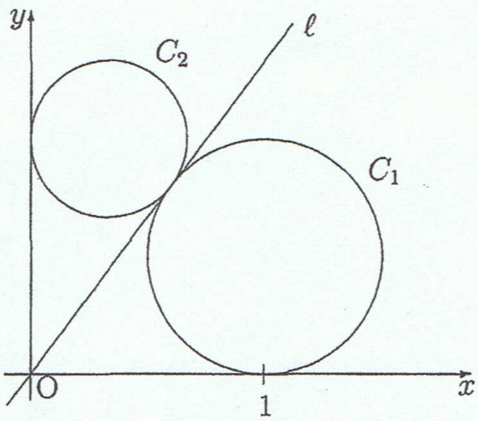
ℓ を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに，以下の 3 条件 (i)，(ii)，(iii) で定まる円 C_1，C_2 を考える。

(i) 円 C_1，C_2 は 2 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる。

(ii) 円 C_1，C_2 は直線 ℓ と同一点で接する。

(iii) 円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する。

円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする。$8r_1 + 9r_2$ が最小となるような直線 ℓ の方程式と，その最小値を求めよ。



〔解説〕

右図において

$\angle C_1OP=\theta \quad (0<\theta<\frac{\pi}{4})$ とおくと

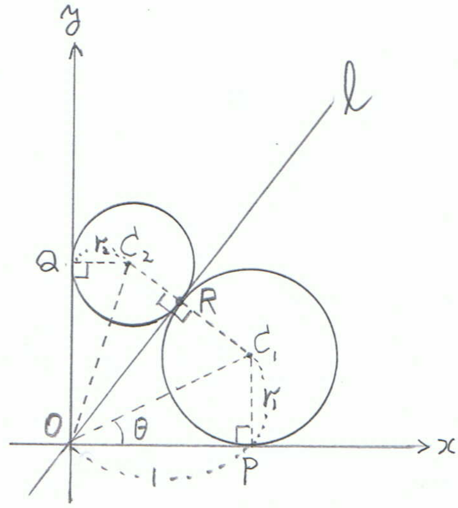
$\angle C_1OR=\theta$

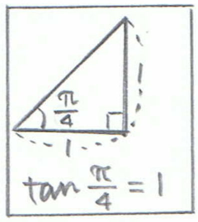
$\angle C_2OR=\angle C_2OQ=\dfrac{\frac{\pi}{2}-2\theta}{2}=\dfrac{\pi}{4}-\theta$

直線 l の傾きは $\tan 2\theta$

また、

$OP=1$ より $OR=1$, $OQ=1$





すると、

$\triangle C_1OP$ において $\tan\theta=\dfrac{C_1P}{OP}=\dfrac{r_1}{1}=r_1$

$\triangle C_2OQ$ において $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\dfrac{C_2Q}{OQ}=\dfrac{r_2}{1}=r_2$

ここで $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

すなわち $r_1=\tan\theta$, $r_2=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$ となる。

加法定理

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

そこで

$$8r_1+9r_2=8\tan\theta+9\cdot\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

$$=8\tan\theta+\frac{-9\tan\theta+9}{\tan\theta+1}$$

$$=8\tan\theta+\frac{18}{\tan\theta+1}-9$$

$$=8(\tan\theta+1)-8+\frac{18}{\tan\theta+1}-9$$

分母と同じものを作ってみた

$$=8(\tan\theta+1)+\frac{18}{\tan\theta+1}-17$$

分数が例えば $\dfrac{-9x+9}{x+1}$ のとき まずやってみることが多いのは 分母と分子が同じ次数なので 分子の次数を下げてみることです。そこで分子を分母で割ってみると

$$\begin{array}{r} -9 \\ \tan\theta+1 \enclose{longdiv}{-9\tan\theta+9} \\ \underline{-9\tan\theta-9} \\ 18 \end{array}$$

通分して変形してもうまくいかないので、正の数を使っているから最小値は相加・相乗平均が使えるかな?と考える。

ここで $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ で $\tan\theta>0$ だから

$\tan\theta+1>0$ となるので

$$8r_1+9r_2$$
$$=8(\tan\theta+1)+\frac{18}{\tan\theta+1}-17\geqq 2\sqrt{8(\tan\theta+1)\times\frac{18}{\tan\theta+1}}-17$$
$$=2\sqrt{144}-17=2\times12-17=7$$

相加・相乗平均

$a\geqq0$, $b\geqq0$ のとき

$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

or

$a+b\geqq2\sqrt{ab}$

等号は $a=b$ で成立。

すなわち $8r_1+9r_2\geqq7$ となるので、

$8r_1+9r_2$ の最小値は 7 となる。

等号が成り立つのは

$$8(\tan\theta+1)=\frac{18}{\tan\theta+1}$$ のとき。

両辺に $\tan\theta+1$ をかけると

$$8(\tan\theta+1)^2=18$$
$$8(\tan^2\theta+2\tan\theta+1)-18=0$$
$$8\tan^2\theta+16\tan\theta-10=0$$

両辺を2で割ると

$$4\tan^2\theta+8\tan\theta-5=0$$
$$(2\tan\theta-1)(2\tan\theta+5)=0$$

$2\tan\theta+5>0$ だから

$$2\tan\theta-1=0$$
$$\therefore \tan\theta=\frac{1}{2}$$

or

$$(\tan\theta+1)^2=\frac{18}{8}$$
$$(\tan\theta+1)^2=\frac{9}{4}$$
$$\tan\theta+1=\pm\frac{3}{2}$$
$$\therefore \tan\theta=\pm\frac{3}{2}-1$$

$\tan\theta>0$ だから

$$\tan\theta=\frac{1}{2}$$

すると、$8r_1+9r_2$ を最小とする直線 l の傾きは

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

加法定理から導かれる公式

$$=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{4}{3}$$

よって、このときの直線 l の方程式は

$$y=\frac{4}{3}x$$