## 第　4　問

数列 $\{p_n\}$ を次のように定める。

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_{n+2} = \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $\dfrac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}\, p_n}$ が $n$ によらないことを示せ。

(2) すべての $n = 2, 3, 4, \cdots$ に対し，$p_{n+1} + p_{n-1}$ を $p_n$ のみを使って表せ。

(3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める。

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 1, \quad q_{n+2} = q_{n+1} + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

すべての $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，$p_n = q_{2n-1}$ を示せ。

[解説]

(1) $\boxed{n\text{によらない} \longrightarrow n\text{の式ではない} \longrightarrow \text{定数になる}}$ と考える。

$a_n = \dfrac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1} p_n}$ とおく。これが $n$ にどんな自然数が入っても定数となるのだから

$a_{n+1}$ を作ってみる。

$$a_{n+1} = \frac{p_{n+2}^2 + p_{n+1}^2 + 1}{p_{n+2}\,p_{n+1}}$$

$p_{n+2} = \dfrac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n}$ を代入

$$= \frac{\left(\dfrac{p_{n+1}^2+1}{p_n}\right)^2 + p_{n+1}^2 + 1}{\dfrac{p_{n+1}^2+1}{p_n}\cdot p_{n+1}}$$

$$= \frac{\dfrac{(p_{n+1}^2+1)^2}{p_n^2} + p_{n+1}^2 + 1}{\dfrac{(p_{n+1}^2+1)p_{n+1}}{p_n}}$$

$$= \frac{\dfrac{(p_{n+1}^2+1)^2 + (p_{n+1}^2+1)p_n^2}{p_n^2}}{\dfrac{(p_{n+1}^2+1)p_{n+1}}{p_n}}$$

$$= \frac{(p_{n+1}^2+1)(p_{n+1}^2+1+p_n^2)}{p_n^2} \times \frac{p_n}{(p_{n+1}^2+1)p_{n+1}}$$

$$= \frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}\,p_n}$$

$$= a_n$$

よって $a_{n+1} = a_n = a_{n-1} = \cdots\cdots = a_2 = a_1 = \dfrac{p_2^2 + p_1^2 + 1}{p_2 p_1} = \dfrac{2^2+1^2+1}{2\times 1} = \dfrac{6}{2} = \underbrace{3}_{\text{定数}}$

したがって $a_n$ は $n$ によらない。

(2)

$A = p_{n+1} + p_{n-1}$ とおく。

$p_n$ を使って表すための準備として、

$p_{n+1}$ を、一部分でもよいから $p_n$ を使って表してみよう。

$$p_{n+2} = \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$ が与えられているので、

これを使ってみると

$$p_{n+1} = \frac{p_n^2 + 1}{p_{n-1}}$$ となる。ここで $p_{n-1}$ が出てきたので

A に代入してみると

$$A = \frac{p_n^2 + 1}{p_{n-1}} + p_{n-1}$$

$$= \frac{p_n^2 + 1 + p_{n-1}^2}{p_{n-1}}$$ ← (1)の分子と同じ形になった!!

$$= \frac{p_n^2 + p_{n-1}^2 + 1}{p_{n-1}} \times \frac{p_n}{p_n}$$ ← (1)の分母の形を作ってみよう。

$$= \frac{p_n^2 + p_{n-1}^2 + 1}{p_n p_{n-1}} \times p_n$$ ← (1)と同じ形の分数になった!!

$$= 3p_n$$ ← (1)の分数は定数になったのだから。

(3) 数学的帰納法での証明になるが、
$n,\ n+1,\ n+2$ と出てきているので

> 自然数 $n$ に関する命題 $P(n)$ が
> すべての $n$ について成り立つ
> ことを証明するには、次の2つのことを証明すればよい。
> [1] $n=1$ のとき $P(1)$ が成り立つことを示す。
> [2] $n=k$ のとき $P(k)$ が成り立つと仮定して、
> $n=k+1$ のとき $P(k+1)$ が成り立つことを示す。

これでは、不足が生じて証明できないので、次の方法を使います。

> [1] $n=1,\ 2$ のとき $P(1),\ P(2)$ が成り立つことを示す。
> [2] $n=k,\ k+1$ のとき $P(k),\ P(k+1)$ が成り立つと仮定して
> $n=k+2$ のとき $P(k+2)$ が成り立つことを示す。

$p_n = q_{2n-1}$ ---- Ⓐ

[1] $n=1$ のとき $p_1=1$, $q_{2\times1-1}=q_1=1$ $\quad\therefore\ p_1=q_1$

$n=2$ のとき $p_2=2$

$q_{2\times2-1}=q_3$

ここで $q_{n+2}=q_{n+1}+q_n$ だから $q_3=q_2+q_1=1+1=2$

$\therefore\ p_2=q_3$

よって $n=1,\ 2$ のとき Ⓐ は成り立つ。

[2] $n=k,\ k+1$ のとき Ⓐ が成り立つと仮定すると

$p_k=q_{2k-1}$, $\quad p_{k+1}=q_{2k+1}$

ここで (2) の $p_{n+1}+p_{n-1}=3p_n$ より

$p_{k+2}+p_k=3p_{k+1}$ と表せるので

$$
\begin{aligned}
p_{k+2} &= 3p_{k+1}-p_k \\
&= 3q_{2k+1}-q_{2k-1} \\
&= \overset{1つ必要}{q_{2k+1}}+2q_{2k+1}-q_{2k-1} \\
&= q_{2k+1}+2(\underbrace{q_{2k}+q_{2k-1}}_{*3})-q_{2k-1} \\
&= q_{2k+1}+2q_{2k}+2q_{2k-1}-q_{2k-1} \\
&= \underbrace{q_{2k+1}+q_{2k}}_{*2}+\underbrace{q_{2k}+q_{2k-1}}_{*3} = \underbrace{q_{2k+2}+q_{2k+1}}_{*1} = q_{2k+3}
\end{aligned}
$$

仮定を使った。

2k+1, 2k−1があるから
2kが欲しい!!

よって $n=k+2$ のとき Ⓐ は成り立つ。ゆえに[1], [2]より $n=1,2,3\cdots$ で Ⓐ は成り立つ。

**先の見通し**

$n=k+2$ のとき
$p_{k+2}=q_{2k+3}$ が成立
これを作るには
$q_{n+2}=q_{n+1}+q_n$ 利用
*1 $q_{2k+3}=q_{2k+2}+q_{2k+1}$
これが欲しいので
同様に
*2 $q_{2k+2}=q_{2k+1}+q_{2k}$
また
*3 $q_{2k+1}=q_{2k}+q_{2k-1}$