## 第　4　問

投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを1枚用意し，次のように左から順に文字を書く。

コインを投げ，表が出たときは文字列 A A を書き，裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，A A，B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば，コインを5回投げ，その結果が順に 表，裏，裏，表，裏 であったとすると，得られる文字列は，

A A B B A A B

となる。このとき，左から4番目の文字は B，5番目の文字は A である。

(1) $n$ を正の整数とする。$n$ 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n$ 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2) $n$ を2以上の整数とする。$n$ 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ $n$ 番目の文字が B となる確率を求めよ。

〔解説〕

(1)　確率の漸化式を作ってみます。

文字列AAは、左右を区別して $A_1A_2$ としておきます。

$n$ 回コインを投げたとき、$n$ 番目の文字が

$A_1$ となる確率を $p_n$

$A_2$ となる確率を $q_n$

$B$ となる確率を $r_n$

とおく。

最初に1回投げたとき、1番目の文字が

$$\left.\begin{array}{l} A_1\text{となる確率 } p_1=\frac{1}{2} \\ A_2\text{となる確率 } q_1=0 \\ B\text{となる確率 } r_1=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{------①}$$

$A_1$ と $A_2$ は常に並べて書かれるので、お互いに関係があるはずだ。

$A_1$ と $A_2$ はいっしょにくっついているから

$n$ 番目が $A_1$ となったとき、このとき同時に

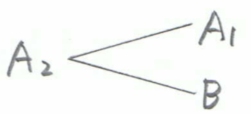
$n+1$ 番目は $A_2$ になっている。

$$q_{n+1}=p_n \text{ ------------ ②}$$

となることがわかる。

更にいろいろな場合の $n$ 番目と $n+1$ 番目の関係を調べてみよう。

［$n$ 番目］　［$n+1$ 番目］

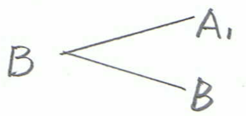



左図のように

$n$ 回投げて $n$ 番目の文字が $A_2$ のとき、

次の $n+1$ 番目の文字は

$A_1$ か $B$ のどちらかである。




また、

$n$ 回投げて $n$ 番目の文字が $B$ のとき、

次の $n+1$ 番目の文字は

$A_1$ か $B$ のどちらかである。

〔$n$番目〕　〔$n+1$番目〕

$A_2$ （確率 $q_n$）
$\times\frac{1}{2}$ → $A_1$ ---- この確率は $q_n\times\frac{1}{2}$
$\times\frac{1}{2}$ → $B$ ---- この確率は $q_n\times\frac{1}{2}$

$B$ （確率 $r_n$）
$\times\frac{1}{2}$ → $A_1$ ---- この確率は $r_n\times\frac{1}{2}$
$\times\frac{1}{2}$ → $B$ ---- この確率は $r_n\times\frac{1}{2}$

**$\times\frac{1}{2}$ とは**

単に
コインを1回
投げたとき、
表の出る確率は $\frac{1}{2}$
裏の出る確率も $\frac{1}{2}$

**確率の乗法定理**

互いに独立な試行S,Tがあり、
Sで事象Aが起こる確率を$p_1$、
Tで事象Bが起こる確率を$p_2$とするとき、
Aが起こり、Bが起こる確率$p$は

$$p=p_1\times p_2$$

そこで、確率の加法定理より

$n+1$回投げて$n+1$番目が$A_1$となる確率$p_{n+1}$は

$$p_{n+1}=q_n\times\frac{1}{2}+r_n\times\frac{1}{2}$$

つまり

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n \quad \text{------③}$$

**確率の加法定理**

2つの事象A,Bが同時に起こり得ないとき
A,Bの起こる確率をそれぞれ$p_1$, $p_2$とするとき
AまたはBの起こる確率$p$は $p=p_1+p_2$

また、

$n+1$回投げて$n+1$番目がBとなる確率$r_{n+1}$は

$$r_{n+1}=q_n\times\frac{1}{2}+r_n\times\frac{1}{2}$$

つまり

$$r_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n \quad \text{------④}$$

となる。

そして、

$p_n$と$q_n$と$r_n$の関係は、当然、

$$p_n+q_n+r_n=1 \quad \text{------⑤}$$

である。

**全事象の確率**

$n$回コインを投げたとき
$n$番目の文字は

$A_1$となる
$A_2$となる
$B$となる

のどれかが必ず起きるのだから
これらの確率をたせば必ず1になる。

ここまでで作った式①〜⑤は、確率に関しての漸化式である。
数列で学んだ漸化式と同様の方法で、これらの式を使って
$n$番目の文字が$A$となる確率 $p_n+q_n$ を$n$の式で表わしていく。

まず③より　$p_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n=\frac{1}{2}(q_n+r_n)$

ここで⑤より　$q_n+r_n=1-p_n$ だから

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}(1-p_n)$$

(　)をはずすと　$p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}$ --- ㋐

この式に対して　$\alpha=-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}$ --- ㋑

となる数$\alpha$を考えると、㋐−㋑から次の等式が得られる

$$p_{n+1}-\alpha=-\frac{1}{2}(p_n-\alpha) \text{ --- ㋒}$$

㋑を解くと　$\alpha+\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}$

$$\frac{3}{2}\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha=\frac{1}{3}$$

したがって㋒は

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$$

| 初項 | 第2項 | 第3項 | | 第$n$項 |
|---|---|---|---|---|
| $p_1-\frac{1}{3}$, | $p_2-\frac{1}{3}$, | $p_3-\frac{1}{3}$, | ----, | $p_n-\frac{1}{3}$ |
| $\times\left(-\frac{1}{2}\right)$ | 〃 | 〃 | 〃 | |

となる。

これは、初項 $p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ 　①より

公比 $-\frac{1}{2}$

の等比数列 $\left\{p_n-\frac{1}{3}\right\}$ である。

**等比数列の一般項**
初項$a$，公比$r$
の等比数列の第$n$項$a_n$は
$a_n=ar^{n-1}$

第$n$項は

$$p_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$p_n=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

$$=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{1}{3}$$

また、②より　$q_n=p_{n-1}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$ ---------- ※ (2)でも使う。

したがって　$n$番目の文字が$A$となる確率は

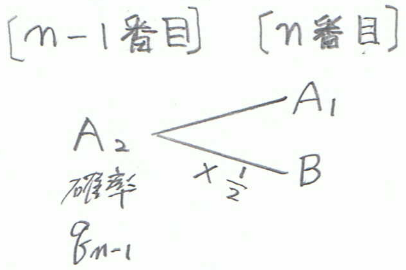
$$p_n+q_n=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

$$=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}$$

$$=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

(2)




$n-1$番目が$A$で、かつ$n$番目が$B$となるのは、
$n-1$番目が$A_2$で、かつ$n$番目が$B$となる場合なので

求める確率は

$$q_{n-1}\times\frac{1}{2}=\left\{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\frac{1}{3}\right\}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$$

②より

$q_{n+1}=p_n$ だから

$q_n=p_{n-1}$

$q_{n-1}=p_{n-2}$

(1)の※より

$$q_n=p_{n-1}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

だから

$$q_{n-1}=p_{n-2}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\frac{1}{3}$$