第　5　問

m を 2015 以下の正の整数とする。 ${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。

[解説]

$A = {}_{2015}C_m$ とおく。

組合せの総数

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$A = \frac{{}_{2015}P_m}{m!}$$

$$= \frac{2015\times 2014\times 2013\times 2012\times 2011\times 2010\times 2009\times\cdots\cdots\times(2016-m)}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times\cdots\cdots\times m}$$

$$= \frac{2015}{1}\times\frac{2014}{2}\times\frac{2013}{3}\times\frac{2012}{4}\times\frac{2011}{5}\times\frac{2010}{6}\times\frac{2009}{7}\times\cdots\times\frac{2016-m}{m}$$

ここでは、$\frac{2015}{1}$, $\frac{2014}{2}$, $\frac{2013}{3}$ ---- などのそれぞれの分数を項と呼ぶことにします。

素因数分解
自然数を素数の積に分解すること

Aが最初に偶数となるのは、
各項において、分母，分子を素因数分解したとき、
分母の2の個数より分子の2の個数の方が多い項が
最初に出てきたとき、その項までの積を作ると偶数となる。

$2016 = 2^5\times 63$ と表せるので、mも同様に
$m = 2^l\times d$ (lは0以上の整数，dは正の奇数) とおいてみる。

Aが最初に偶数となったときの末項(最後尾の項)は

$$\frac{2016-m}{m} = \frac{2^5\times 63-2^l\times d}{2^l\times d} = \frac{2^l(2^{5-l}\times 63-d)}{2^l\times d} = \frac{2^{5-l}\times 63-d}{d}$$

これが偶数となり、かつmが最小となるのは、

$2^{5-l} = 1$ かつ $d = 1$

つまり $l = 5$, $d = 1$ のときである。

したがって 求める $m = 2^5\times 1 = 32$