第　6　問

n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\pi x)+1}{2} & (\ |x| \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\ |x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする。$|x| \leqq \dfrac{1}{n}$ をみたす x に対して $p \leqq f(x) \leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。

$$p \leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx \leqq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (\ |x| \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\ |x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$$

(1) $\begin{cases} -1 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき } g(x) = \dfrac{\cos(\pi x)+1}{2} \\ x<-1,\ 1<x \text{ のとき } g(x)=0 \end{cases}$

n が正の整数で、x を nx とおきかえると

$\begin{cases} -1 \leqq nx \leqq 1 \text{ のとき、つまり } -\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq \dfrac{1}{n} \text{ のとき } g(nx) = \dfrac{\cos(n\pi x)+1}{2} \\ nx<-1,\ 1<nx \text{ のとき、つまり } x<-\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n}<x \text{ のとき } g(nx)=0 \end{cases}$

$-\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq \dfrac{1}{n}$ のとき $p \leqq f(x) \leqq q$ --------- ①

ここで $-\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq \dfrac{1}{n}$ のとき $g(nx) = \dfrac{\cos(n\pi x)+1}{2}$ であり、

$-1 \leqq \cos(n\pi x) \leqq 1$ より

全辺に 1 をたす。

$0 \leqq \cos(n\pi x)+1 \leqq 2$

全辺を 2 で割る

$0 \leqq \dfrac{\cos(n\pi x)+1}{2} \leqq 1$

$\therefore\ 0 \leqq g(nx) \leqq 1$

つまり $g(nx) \geqq 0$ だから

① の全辺に $g(nx)$ をかけると

$p\,g(nx) \leqq g(nx)f(x) \leqq q\,g(nx)$ --------- ②

② の全辺を $x=-1$ から $x=1$ まで、x で積分すると

$\displaystyle\int_{-1}^{1} p\,g(nx)\,dx \leqq \int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx \leqq \int_{-1}^{1} q\,g(nx)\,dx$

$\displaystyle p\int_{-1}^{1} g(nx)\,dx \leqq \int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx \leqq q\int_{-1}^{1} g(nx)\,dx$ -------- ③

定積分の性質

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

ここで、$-1 \leqq -\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{n} \leqq 1$ だから

$$\int_{-1}^{1} g(nx)\,dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} g(nx)\,dx + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{1} g(nx)\,dx$$

$x<-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}<x$ のとき $g(nx)=0$

$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} 0\,dx + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{1} 0\,dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx$$

そこで ③ は $\displaystyle p\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx \leqq \int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx \leqq q\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx$

全辺に $n>0$ をかけると

$$np\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx \leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx \leqq nq\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx \text{ -------- ④}$$

ここで

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\cos(n\pi x)+1}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \{\cos(n\pi x)+1\}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)+x\right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n\pi}\sin\left(n\pi\cdot\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n\pi}\sin\left(n\pi\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\right)-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n\pi}\sin\pi+\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n\pi}\sin(-\pi)-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{0+\frac{1}{n}-\left(0-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{2}{n}$$

$$= \frac{1}{n}$$

よって ④ より

$$np\cdot\frac{1}{n} \leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx \leqq nq\cdot\frac{1}{n}$$

$$\therefore\ p \leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx \leqq q$$

(2) $\begin{cases} -1 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき } h(x) = -\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) \\ x < -1,\ 1 < x \text{ のとき } h(x) = 0 \end{cases}$

において x を nx とおきかえると

$\begin{cases} -\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq \dfrac{1}{n} \text{ のとき } h(nx) = -\dfrac{\pi}{2}\sin(n\pi x) \\ x < -\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n} < x \text{ のとき } h(nx) = 0 \end{cases}$

ここで (1) における $g(x)$ と、$h(x)$ を比べてみると

$g(x) = \dfrac{\cos(\pi x)+1}{2}$ より

$g'(x) = \dfrac{-\pi\sin(\pi x)+0}{2} = -\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) = h(x)$

また

$g(nx) = \dfrac{\cos(n\pi x)+1}{2}$ より

$g'(nx) = \dfrac{-n\pi\sin(n\pi x)+0}{2} = -\dfrac{n\pi}{2}\sin(n\pi x) = nh(nx)$

$$\boxed{g(x) \underset{\text{セキブン}}{\overset{\text{ビブン}}{\rightleftarrows}} h(x) \qquad g(nx) \underset{\text{セキブン}}{\overset{\text{ビブン}}{\rightleftarrows}} nh(nx)}$$

そこで $A = n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$ とおく。

このとき

積分の範囲を $-\frac{1}{n} \leqq x \leqq \frac{1}{n}$ にして、上の $\boxed{}$ の中の関係を使う。

$\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$

$= \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$

ここで $x < -\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n} < x$ のとき $h(nx) = 0$ だから

$\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$

$= \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} 0\cdot\log(1+e^{x+1})\,dx + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{1} 0\cdot\log(1+e^{x+1})\,dx$

$= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$ となるので

$$A = n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$$

$$= n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$$

$$= n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} nh(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$$

$$\boxed{g(nx) \underset{セキブン}{\overset{ビブン}{\rightleftarrows}} nh(nx)}$$

部分積分法

$$= n\left\{\left[g(nx)\log(1+e^{x+1})\right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} - \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}\,dx\right\}$$

$$= n\left\{g(1)\log(1+e^{\frac{1}{n}+1}) - g(-1)\log(1+e^{-\frac{1}{n}+1}) - \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}\,dx\right\}$$

$$= n\left\{0\cdot\log(1+e^{\frac{1}{n}+1}) - 0\cdot\log(1+e^{-\frac{1}{n}+1}) - \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}\,dx\right\}$$

$$= -n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}\,dx \quad \text{-----⑤}$$

$$\boxed{\begin{aligned} g(1) &= \frac{\cos\pi+1}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0 \\ g(-1) &= \frac{\cos(-\pi)+1}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0 \end{aligned}}$$

さて、ここで

---

(1)の下の文を細かく読んでみると、

区間 $-\frac{1}{n} \leqq x \leqq \frac{1}{n}$ のとき

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする。$|x| \leqq \dfrac{1}{n}$ をみたす x に対して $p \leqq f(x) \leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。

p：$f(x)$ の最小値　q：$f(x)$ の最大値

$$p \leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx \leqq q$$

p：$f(x)$の最小値　$f(x)$：連続な関数　q：$f(x)$の最大値

すると、

⑤の式と(1)の不等式の $n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)dx$ が似ているので

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}} \quad \text{とおいてみる。}$$

そしてこの $f(x)$ の $-\frac{1}{n} \leqq x \leqq \frac{1}{n}$ における最小値，最大値をさがしてみる。

$f(x) = \dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}$ とすると

$$f'(x) = \frac{e^{x+1}(1+e^{x+1}) - e^{x+1}(0+e^{x+1})}{(1+e^{x+1})^2} = \frac{e^{x+1}}{(1+e^{x+1})^2}$$

ここで $e^{x+1} > 0$, $(1+e^{x+1})^2 > 0$ だから $f'(x) > 0$

x	$-\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(-\frac{1}{n})$ 最小	$\nearrow$	$f(\frac{1}{n})$ 最大

$-\frac{1}{n} \leqq x \leqq \frac{1}{n}$ のとき $f(x)$ は単調増加連続関数であり

$f(-\frac{1}{n}) = \dfrac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}$ $f(\frac{1}{n}) = \dfrac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}$ なので

$$\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}} \leqq f(x) \leqq \frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}$$ となる。

そこで (1) より

$$\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}} \leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx \leqq \frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}} \quad \text{--------⑥}$$

ここで ⑤ を使うために 積分の範囲を $-\frac{1}{n} \leqq x \leqq \frac{1}{n}$ にかえる.

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{1} g(nx)f(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} 0\cdot f(x)\,dx + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{1} 0\cdot f(x)\,dx \\
&= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx
\end{aligned}$$

となるので. ⑥ は

$$\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}} \leqq n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx \leqq \frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}$$

全辺に −1 をかけると

$$-\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}} \leqq \underbrace{-n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx}_{⑤\text{より}A} \leqq -\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}$$

マイナスかけて大小入れかわった。

$$-\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}} \leqq \underbrace{n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx}_{A} \leqq -\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}\right) = -\frac{e}{1+e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\right) = -\frac{e}{1+e}$$

したがって、はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx = -\frac{e}{1+e}$$