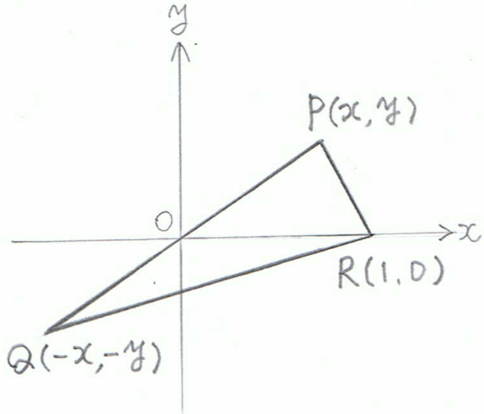
第　1　問

座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{Q}(-x, -y)$, $\mathrm{R}(1, 0)$ が鋭角三角形をなすための (x, y) についての条件を求めよ。また, その条件をみたす点 $\mathrm{P}(x, y)$ の範囲を図示せよ。

△PQR の各辺の長さを求めておくと



$PQ^2 = \{x-(-x)\}^2 + \{y-(-y)\}^2$

$\quad = (2x)^2 + (2y)^2 = 4x^2 + 4y^2$

$QR^2 = (-x-1)^2 + (-y-0)^2$

$\quad = x^2 + 2x + 1 + y^2$

$RP^2 = (1-x)^2 + (0-y)^2$

$\quad = 1 - 2x + x^2 + y^2$

△PQR が鋭角三角形であるためには、次の3つの条件を満たす必要.

$$\begin{cases} PQ^2 < QR^2 + RP^2 \\ QR^2 < PQ^2 + RP^2 \\ RP^2 < PQ^2 + QR^2 \end{cases}$$

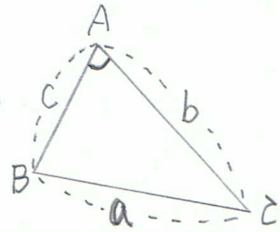
余弦定理

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

A が鋭角なら $\cos A > 0$

だから

$a^2 < b^2 + c^2$



そこで

$$\begin{cases} 4x^2+4y^2 < x^2+2x+1+y^2+1-2x+x^2+y^2 & \cdots ① \\ x^2+2x+1+y^2 < 4x^2+4y^2+1-2x+x^2+y^2 & \cdots ② \\ 1-2x+x^2+y^2 < 4x^2+4y^2+x^2+2x+1+y^2 & \cdots ③ \end{cases}$$

①より $2x^2+2y^2 < 2 \quad \therefore x^2+y^2 < 1 \quad \cdots ①'$

②より $4x^2+4y^2-4x > 0$

$x^2 - x + y^2 > 0$

$(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + y^2 > 0$

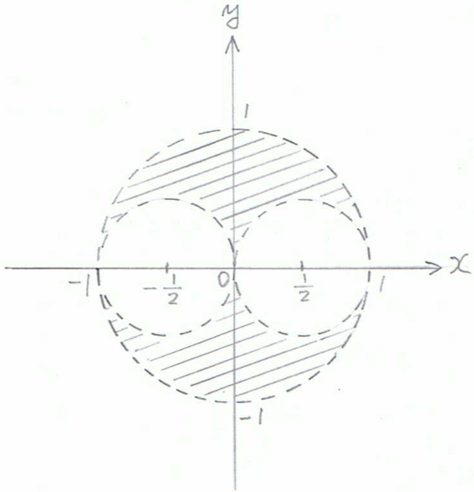
$\therefore (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 > \frac{1}{4} \quad \cdots ②'$

③より $4x^2+4y^2+4x > 0$

$x^2 + x + y^2 > 0$

$(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + y^2 > 0$

$\therefore (x+\frac{1}{2})^2 + y^2 > \frac{1}{4} \quad \cdots ③'$



したがって　△PQR が鋭角三角形となる(x, y)の条件は

$x^2+y^2<1$ かつ $(x-\frac{1}{2})^2+y^2 > \frac{1}{4}$ かつ $(x+\frac{1}{2})^2+y^2 > \frac{1}{4}$ である。

これを満たす点P(x, y)の範囲は、右図の斜線部分。

ただし、境界を含まない。