第　2　問

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a) 1 試合目で A と B が対戦する。

(b) 2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1) n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。

(1) n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

書き並べて、規則を見つけ出す。

n試合目でAが優勝する確率を P_n,

t を自然数とする。

ア　1試合目にAが勝つとき

試合番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	・・・	n−1	n
勝者	A	C	B	A	C	B	A	C	B	A	・・・	A	A

優勝者が決まらない間は、勝者は ACB の繰り返し

この間、Aが勝つ試合番号は 1,4,7,・・・・の等差数列なので、

その一般項は、$1+3(t-1)=3t-2$ と表せる。

そこで、$n-1$ 試合目が、$n-1=3t-2$ となっていて

次の n 試合目でAが勝てば優勝となるから

$n-1=3t-2$ より　$n=3t-1$

このとき $$P_n=\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\cdots\cdots\times\frac{1}{2}}_{n\text{個}}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

イ　1試合目にBが勝つとき

試合番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	・・・	n−1	n
勝者	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	・・・	A	A

優勝者が決まらない間は、勝者は **BCA** の繰り返し

この間、A が勝つ試合番号は 3,6,9,・・・・の等差数列なので、

その一般項は、3t と表せる。

そこで、n−1 試合目が、n−1＝3t となっていて

次の n 試合目で A が勝てば優勝となるから

$n-1=3t$ より　$n=3t+1$

このとき $P_n=\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\cdots\cdots\times\frac{1}{2}}_{n個}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

したがって　ア,イ　より　ちょうど n 試合目で A が優勝する確率 P_n は

t を自然数として

$n = 3t \pm 1$ のとき　$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$　← nが3の倍数でないとき

$n = 3t$ のとき　$P_n = 0$　← nが3の倍数のとき

となる。

(2) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき, A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。

「総試合数が３ｍ回以下でＡが優勝する場合」を調べる。

ア　１試合目にＡが勝つとき

試合番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	・・・	3m−3	3m−2	3m−1	3m	3m+1
勝者	A	C	B	A	C	B	A	C	B	A	・・・	B	A	C	B	A
A優勝の場合の勝者		A			A			A						A		
A優勝の確率		$(1/2)^2$			$(1/2)^5$			$(1/2)^8$						$(1/2)^{3m-1}$		

３×１＝３試合以下でA優勝する確率は　$(1/2)^2$

３×２＝６試合以下でA優勝する確率は　$(1/2)^2+(1/2)^5$

３×３＝９試合以下でA優勝する確率は　$(1/2)^2+(1/2)^5+(1/2)^8$

・・・・・・・・

３×m＝３m試合以下でA優勝する確率は　$(1/2)^2+(1/2)^5+(1/2)^8+\cdots\cdots+(1/2)^{3m-1}$

イ　１試合目にＢが勝つとき

試合番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	・・・	3m−3	3m−2	3m−1	3m	3m+1
勝者	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	・・・	A	B	C	A	B
A優勝の場合の勝者				A			A			A			A			A
A優勝の確率				$(1/2)^4$			$(1/2)^7$			$(1/2)^{10}$			$(1/2)^{3m-2}$			$(1/2)^{3m+1}$

３×１＝３試合以下でA優勝する確率は、３試合以下でAが２連勝することは無いので　０

３×２＝６試合以下でA優勝する確率は　$(1/2)^4$

３×３＝９試合以下でA優勝する確率は　$(1/2)^4+(1/2)^7$

３×４＝１２試合以下でA優勝する確率は　$(1/2)^4+(1/2)^7+(1/2)^{10}$

・・・・・・・・

３×ｍ＝３ｍ試合以下でA優勝する確率は　$(1/2)^4+(1/2)^7+(1/2)^{10}+\cdots\cdots+(1/2)^{3m-2}$

ア　1試合目にAが勝つとき

3m試合以下でAが優勝する確率は

$$(1/2)^2+(1/2)^5+(1/2)^8+\cdots\cdots+(1/2)^{3m-1}=\frac{(1/2)^2\{1-(1/8)^m\}}{1-1/8}=\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{8^m}\right)}{\frac{7}{8}}$$

$$=\underline{\frac{2}{7}\left(1-\frac{1}{8^m}\right)}$$

初項 $(1/2)^2$

$3\underbrace{m}-1$

↓

$1,2,3,\cdots,m$

公比 $(1/2)^3=1/8$

項数 m

イ　1試合目にBが勝つとき（Aの最後の対戦相手がBとなって優勝するとき）

3m試合以下でAが優勝する確率は

$$(1/2)^4+(1/2)^7+(1/2)^{10}+\cdots\cdots+(1/2)^{3m-2}=\frac{(1/2)^4\{1-(1/8)^{m-1}\}}{1-1/8}=\frac{\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{8^{m-1}}\right)}{\frac{7}{8}}$$

$$=\frac{1}{14}\left(1-\frac{1}{8^{m-1}}\right)$$

$$=\underline{\frac{1}{14}\left(1-\frac{8}{8^m}\right)}$$

初項 $(1/2)^4$

$3\underbrace{m}-2$

↓

$2,3,4,\cdots,m$

公比 $(1/2)^3=1/8$

項数 m-1

3m試合以下でAが優勝するとき最後の対戦相手がBとなる確率

(2) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下でAが優勝したとき Aの最後の対戦相手がBである条件付き確率を求めよ。

3m試合以下でAが優勝する確率

$$\frac{\text{イ}}{\text{ア}+\text{イ}} = \frac{\frac{1}{14}\left(1-\frac{8}{8^m}\right)}{\frac{2}{7}\left(1-\frac{1}{8^m}\right)+\frac{1}{14}\left(1-\frac{8}{8^m}\right)}$$

分母と分子に $14\cdot 8^m$ をかける

$$= \frac{14\cdot 8^m \times \frac{1}{14}\left(1-\frac{8}{8^m}\right)}{14\cdot 8^m \times \frac{2}{7}\left(1-\frac{1}{8^m}\right) + 14\cdot 8^m \times \frac{1}{14}\left(1-\frac{8}{8^m}\right)}$$

$$= \frac{8^m-8}{4(8^m-1)+8^m-8}$$

$$= \frac{8^m-8}{5\cdot 8^m-12}$$