第　2　問

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a) 1 試合目で A と B が対戦する。

(b) 2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1) ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(3) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ。

(1)

① ② ③ ④ ⑤
A C B A A

5試合目でAが優勝するには、1試合目に勝って左のようになる場合だから、その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

(2)

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ------
A A
C B A A
C B A A
C B A A

上図のように、Aが1試合目に勝った場合、
Aの優勝は、2試合目または5試合目または8試合目または11試合目……
つまり k を自然数として

$$2+3(k-1) = 3k-1 \text{ 試合目}$$

となるので、その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{3k-1}$

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ----
B C A A
B C A A
B C A A
B C A A

上図のように Bが1試合目に勝った場合、
Aの優勝は、4試合目または7試合目または10試合目または13試合目……
つまり k を自然数として

$$4+3(k-1) = 3k+1 \text{ 試合目}$$

となるので、その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1}$

したがって、求める確率は

$$\begin{cases} n\text{が3の倍数のとき} & 0 \\ n\text{が3の倍数でないとき} & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

(3) Aが1試合目に勝った場合、

Aの優勝は k を自然数として $3k-1$ 試合目でその確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{3k-1}$

だから $3m$ 回以下でAが優勝する確率は

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^8+\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1}+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}}_{m\text{個の和}}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{4}\times\frac{8}{7}\times\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}$$

Bが1試合目に勝った場合、

Aの優勝は k を自然数として $3k+1$ 試合目でその確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1}$

だから $3m$ 回以下でAが優勝する確率は

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\left(\frac{1}{2}\right)^{13}+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1}+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{3(m-1)+1}}_{m-1\text{個の和}}+\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{3m+1}}$$

3m回をこえている

$$=\frac{\frac{1}{16}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{16}\times\frac{8}{7}\times\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}=\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}$$

したがって、$3m$ 回以下でAが優勝する確率は

$$\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}+\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}$$

$$=\frac{2}{7}+\frac{1}{14}-\left\{\frac{2}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^m+\frac{1}{14}\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}$$

$$=\frac{5}{14}-\left\{\frac{2}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^m+\frac{1}{14}\cdot\frac{8}{1}\cdot\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}$$

$$=\frac{5}{14}-\left(\frac{2}{7}+\frac{4}{7}\right)\left(\frac{1}{8}\right)^m$$

$$=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^m$$