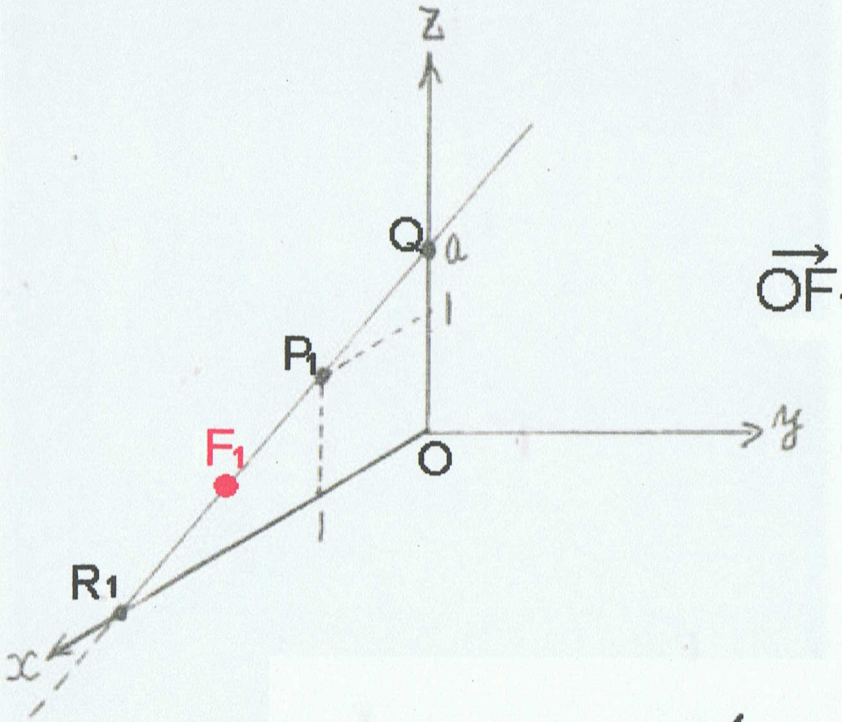
第　3　問

a を $1<a<3$ をみたす実数とし, 座標空間内の 4 点 $\mathrm{P_1}(1,0,1)$, $\mathrm{P_2}(1,1,1)$, $\mathrm{P_3}(1,0,3)$, $\mathrm{Q}(0,0,a)$ を考える。直線 $\mathrm{P_1Q}$, $\mathrm{P_2Q}$, $\mathrm{P_3Q}$ と xy 平面の交点をそれぞれ $\mathrm{R_1}$, $\mathrm{R_2}$, $\mathrm{R_3}$ として, 三角形 $\mathrm{R_1R_2R_3}$ の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を最小にする a と, そのときの $S(a)$ の値を求めよ。

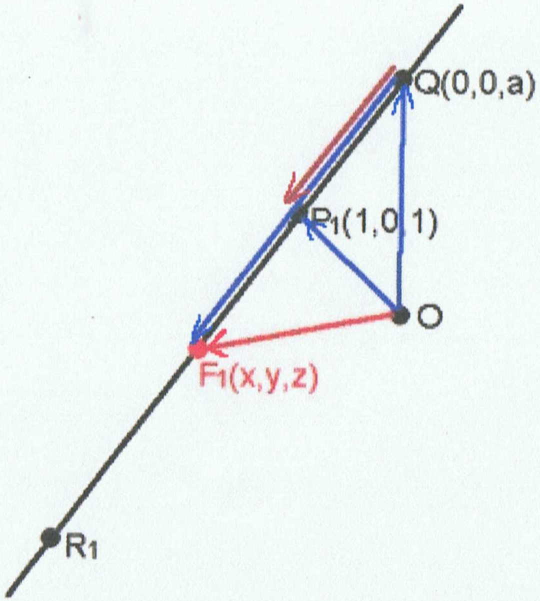


直線P_1Q上の任意の点を$F_1(x,y,z)$とし
実数 t_1を媒介変数として
直線P_1Qをベクトル表示すると

$$\overrightarrow{OF_1}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QF_1}=\overrightarrow{OQ}+t_1\overrightarrow{QP_1}=\overrightarrow{OQ}+t_1(\overrightarrow{OP_1}-\overrightarrow{OQ})$$

これを成分表示すると

$$(x,y,z)=(0,0,a)+t_1\{(1,0,1)-(0,0,a)\}$$
$$=(0,0,a)+t_1(1-0,0-0,1-a)$$
$$=(0,0,a)+t_1(1,0,1-a)$$
$$=(0,0,a)+(t_1,0,t_1(1-a))$$
$$=(t_1,0,a+t_1(1-a))$$

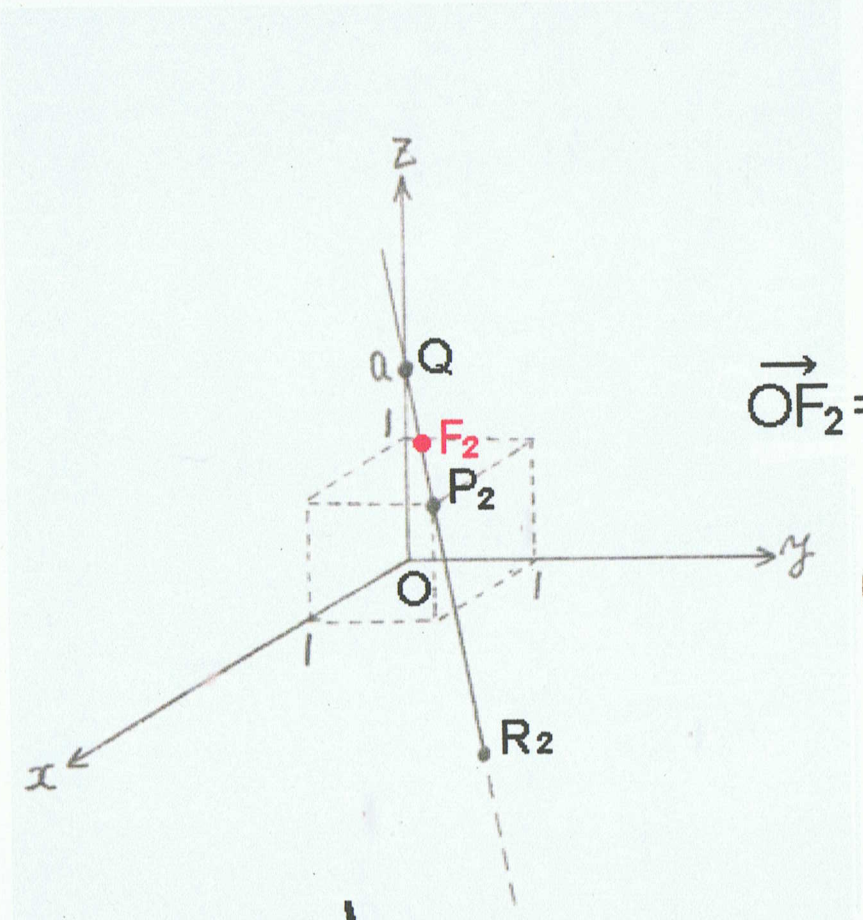


直線P_1Qとxy平面の交点R_1は $z=0$ だから

$$a+t_1(1-a)=0$$

$a\neq1$だから　$t_1=\dfrac{-a}{1-a}$

よって　$R_1\left(\dfrac{-a}{1-a},0,0\right)$



直線P_2Q上の任意の点を$F_2(x,y,z)$とし

実数 t_2を媒介変数として

直線P_2Qをベクトル表示すると

$$\overrightarrow{OF_2}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QF_2}=\overrightarrow{OQ}+t_2\overrightarrow{QP_2}=\overrightarrow{OQ}+t_2(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OQ})$$

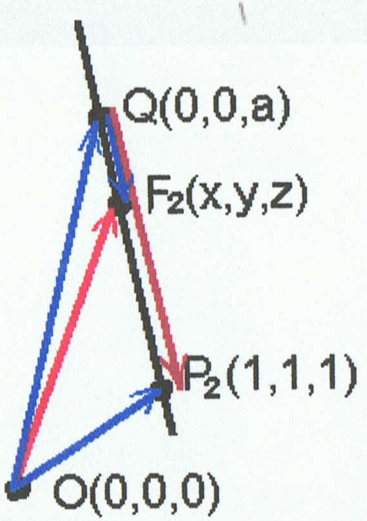
これを成分表示すると

$$(x,y,z)=(0,0,a)+t_2\{(1,1,1)-(0,0,a)\}$$

$$=(0,0,a)+t_2(1,1,1-a)$$

$$=(0,0,a)+(t_2,t_2,t_2(1-a))$$

$$=(t_2,t_2,a+t_2(1-a))$$

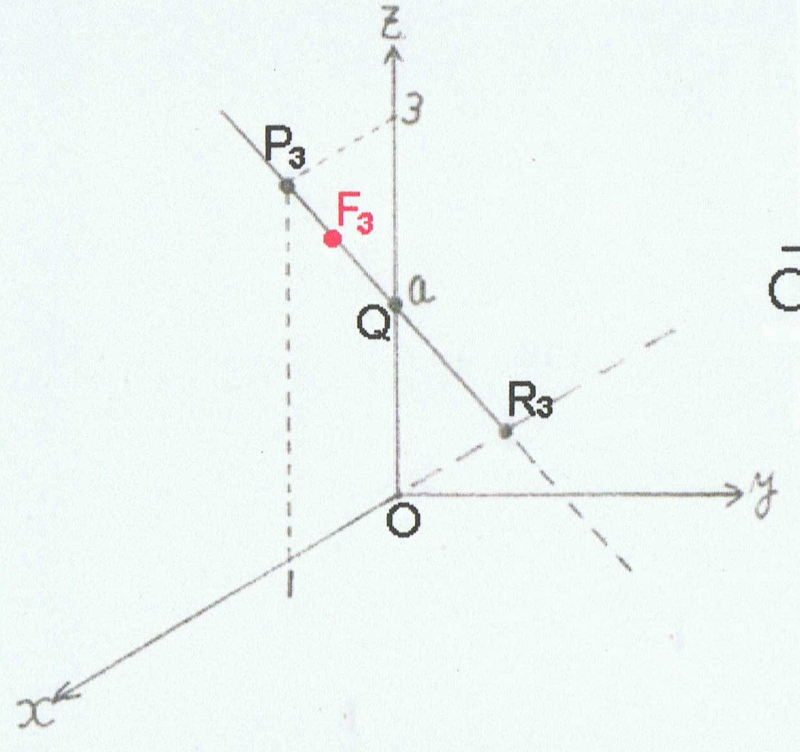


直線P_2Qとxy平面の交点R_2は$z=0$だから

$$a+t_2(1-a)=0$$

$a\neq1$だから　$t_2=\dfrac{-a}{1-a}$

よって　$R_2\left(\dfrac{-a}{1-a},\dfrac{-a}{1-a},0\right)$



直線P_3Q上の任意の点を$F_3(x,y,z)$とし

実数 t_3を媒介変数として

直線P_3Qをベクトル表示すると

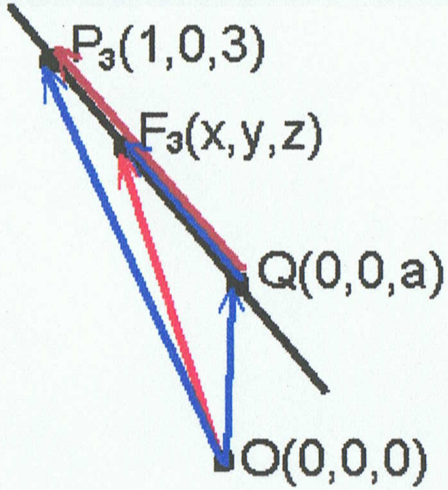
$$\overrightarrow{OF_3}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QF_3}=\overrightarrow{OQ}+t_3\,\overrightarrow{QP_3}=\overrightarrow{OQ}+t_3\,(\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OQ})$$

これを成分表示すると

$$(x,y,z)=(0,0,a)+t_3\{(1,0,3)-(0,0,a)\}$$

$$=(0,0,a)+(t_3,0,t_3(3-a))$$

$$=(t_3,0,a+t_3(3-a))$$

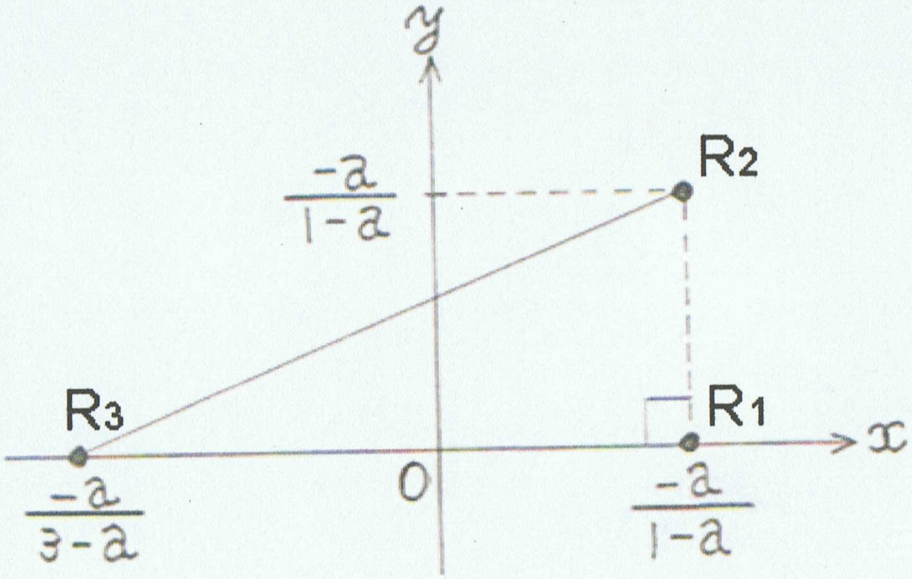


直線P_3Qとxy平面の交点R_3は$z=0$だから

$$a+t_3\,(3-a)=0$$

$a\fallingdotseq 1$だから $t_3=\dfrac{-a}{3-a}$

よって $R_3\left(\dfrac{-a}{3-a},0,0\right)$



1<a<3 で、

$\triangle R_1R_2R_3$ をxy平面に図示すると左図のようになり、直角三角形になっている。

面積$S(a)=\frac{1}{2}\times$底辺$\times$高さ

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{-a}{1-a}-\frac{-a}{3-a}\right)\times\frac{-a}{1-a}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{-a(3-a)+a(1-a)}{(1-a)(3-a)}\times\frac{-a}{1-a}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{-2a}{(1-a)(3-a)}\times\frac{-a}{1-a}$$

$$=\frac{a^2}{(1-a)^2(3-a)}$$

$$S(a)=\frac{a^2}{(1-a)^2(3-a)}$$

$$S'(a)=\frac{2a(1-a)^2(3-a)-a^2\{2(1-a)(-1)(3-a)+(1-a)^2(-1)\}}{\{(1-a)^2(3-a)\}^2}$$

$$=\frac{2a(1-a)^2(3-a)-a^2\{-2(1-a)(3-a)-(1-a)^2\}}{(1-a)^4(3-a)^2}$$

$$=\frac{(1-a)[2a(1-a)(3-a)-a^2\{-2(3-a)-(1-a)\}]}{(1-a)^4(3-a)^2}$$

$$=\frac{-a^3-a^2+6a}{(1-a)^3(3-a)^2}$$

$$=\frac{-a(a+3)(a-2)}{(1-a)^3(3-a)^2}=\frac{a(a+3)(a-2)}{(a-1)^3(3-a)^2}$$

$$S(a)=\frac{a^2}{(1-a)^2(3-a)}$$

$$S'(a)=\frac{a(a+3)(a-2)}{(a-1)^3(3-a)^2}$$

$1<a<3$ における $S(a)$ の増減表は、次のようになる。

a	1		2		3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

したがって、$S(a)$ は $a=2$ のとき最小となり

その値は　$S(2)=\dfrac{2^2}{(1-2)^2(3-2)}=4$ である。