第　3　問

座標平面上の2つの放物線

$$A:\quad y = x^2$$
$$B:\quad y = -x^2 + px + q$$

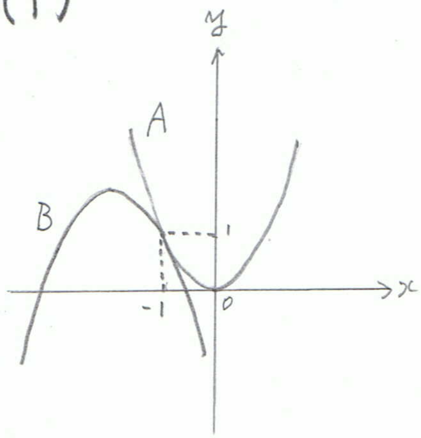
が点 $(-1, 1)$ で接している。ここで，p と q は実数である。さらに，t を正の実数とし，放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$，y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする。

(1) p と q の値を求めよ。

(2) 放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする。ただし，A と C が領域を囲まないときは $S(t) = 0$ と定める。$S(t)$ を求めよ。

(3) $t > 0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。

(1)



A： $y = x^2$ ----①

B： $y = -x^2 + px + q$ ----②

①より $y' = 2x$ ----①′

②より $y' = -2x + p$ ----②′

AとBは点$(-1, 1)$で接しているから接線の傾きは等しいので①′,②′より

$-2 = 2 + p \quad \therefore p = -4$

またBは点$(-1, 1)$を通るので②より

$1 = -1 - p + q$

$q = p + 2 = -4 + 2 = -2$

したがって $p = -4,\ q = -2$

(2)

(1)の結果から B：$y = -x^2 - 4x - 2$

$= -(x^2 + 4x) - 2$

$= -(x+2)^2 + 4 - 2$

$= -(x+2)^2 + 2$

すると C：$y = -(x + 2 - 2t)^2 + 2 + t$

AとCの共有点を調べると

$x^2 = -(x + 2 - 2t)^2 + 2 + t$

$x^2 + (x + 2 - 2t)^2 - 2 - t = 0$

$x^2 + x^2 + 4 + 4t^2 + 4x - 8t - 4tx - 2 - t = 0$

$2x^2 + 4(1-t)x + (4t^2 - 9t + 2) = 0$ ----------③

$\frac{D}{4} = \{2(1-t)\}^2 - 2(4t^2 - 9t + 2)$

$= 4 - 8t + 4t^2 - 8t^2 + 18t - 4$

$= -4t^2 + 10t$ ----------------④

$= -2t(2t - 5)$

よって、AとCが2個の共有点を持つのは

$-2t(2t-5) > 0$ のとき

つまり $t > 0$ より $2t - 5 < 0$ だから

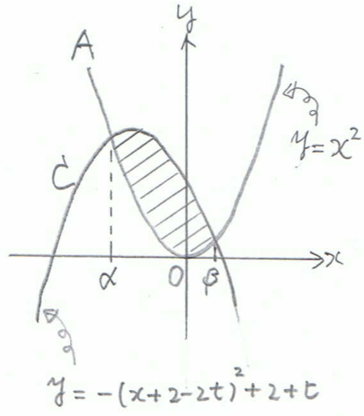
$0 < t < \frac{5}{2}$ のときである。

したがって、

$t \geqq \frac{5}{2}$ のとき AとCが領域を囲まないので $S(t)=0$

$0<t<\frac{5}{2}$ のとき AとCが領域を囲む。

そこで このときの $S(t)$ を求めていく。



③の2次方程式の解を α, β (α<β) とおくと

$$S(t)=\int_{\alpha}^{\beta}\{-(x+2-2t)^2+2+t-x^2\}dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}\{2x^2+4(1-t)x+(4t^2-9t+2)\}dx$$

$$=-2\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

面積公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{-(\beta-\alpha)^3}{6}$$

$$=-2\times\frac{-(\beta-\alpha)^3}{6}$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

ここで③より $\beta-\alpha=\dfrac{-2(1-t)+\sqrt{\frac{D}{4}}}{2}-\dfrac{-2(1-t)-\sqrt{\frac{D}{4}}}{2}$

$$=\frac{\sqrt{\frac{D}{4}}}{2}+\frac{\sqrt{\frac{D}{4}}}{2}=\sqrt{\frac{D}{4}}=\sqrt{-4t^2+10t}$$ ④より

だから $S(t)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{-4t^2+10t}\right)^3$

したがって

$$S(t)=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(\sqrt{-4t^2+10t}\right)^3 & \left(0<t<\frac{5}{2}\text{のとき}\right)\\ 0 & \left(t\geqq\frac{5}{2}\text{のとき}\right)\end{cases}$$

(3)

$$S(t)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{-4t^2+10t}\right)^3=\frac{1}{3}\left(\sqrt{-4\left(t^2-\frac{5}{2}t\right)}\right)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{-4\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+4\times\frac{25}{16}}\right)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{-4\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{25}{4}}\right)^3$$

よって $t=\frac{5}{4}$ のとき $S(t)$ は最大となり、その最大値は

$$S\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{25}{4}}\right)^3=\frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{24}$$