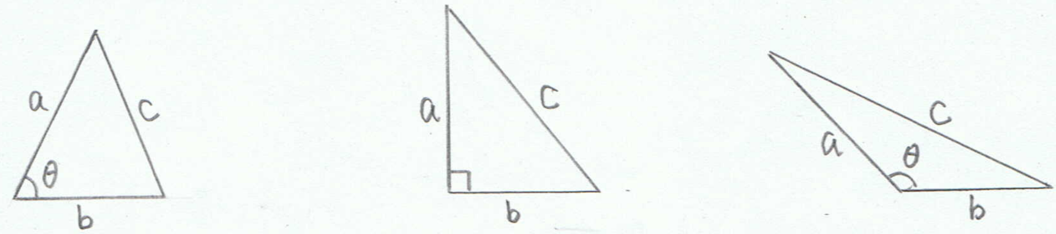
第　4　問

z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 A(1), B(z), C(z^2) が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ。

余弦定理で、三角形の角と辺の関係を確認。



㋐ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき

$$c^2=a^2+b^2-\underbrace{2ab\cos\theta}_{\text{正数}}$$

$\therefore c^2<a^2+b^2$

㋑ $\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき

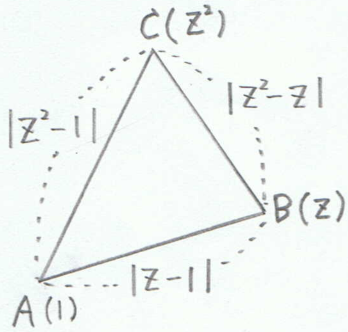
$$c^2=a^2+b^2-\underbrace{2ab\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}$$

$\therefore c^2=a^2+b^2$（三平方の定理）

㋒ $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき

$$c^2=a^2+b^2-\underbrace{2ab\cos\theta}_{\text{負数}}$$

$\therefore c^2>a^2+b^2$



鋭角三角形ならば、角と辺の関係は上記余弦定理の㋐を使えばよい。

複素平面において、2点間の距離は
$P(z_1)$, $Q(z_2)$ とするとき
$PQ=|z_1-z_2|$

△ABC が鋭角三角形ならば、次の式が成り立つ。

$$\begin{cases}|z-1|^2+|z^2-1|^2>|z^2-z|^2\\ |z-1|^2+|z^2-z|^2>|z^2-1|^2\\ |z^2-1|^2+|z^2-z|^2>|z-1|^2\end{cases}$$

上式に右記の法則等を使って変形すると

$$\begin{cases}|z-1|^2+|z+1|^2|z-1|^2>|z|^2|z-1|^2\\ |z-1|^2+|z|^2|z-1|^2>|z+1|^2|z-1|^2\\ |z+1|^2|z-1|^2+|z|^2|z-1|^2>|z-1|^2\end{cases}$$

$z=1$ のとき 三点 A, B, C は一致して三角形を作らなくなってしまうので、$z\neq1$ となる。$|z-1|^2>0$ だから

そこで、上式を $|z-1|^2$ で割ると

$$\begin{cases}1+|z+1|^2>|z|^2 & \text{----①}\\ 1+|z|^2>|z+1|^2 & \text{----②}\\ |z+1|^2+|z|^2>1 & \text{----③}\end{cases}$$

複素数の計算では、交換、結合、分配法則が成立

複素数 z_1, z_2, z_3 において

Ⅰ 交換法則

$z_1+z_2=z_2+z_1$ （加法）

$z_1z_2=z_2z_1$ （乗法）

Ⅱ 結合法則

$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ （加法）

$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$ （乗法）

Ⅲ 分配法則

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$$

極形式による乗除計算

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

とすると、

$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

より

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$$

①より
$$1+(z+1)(\overline{z+1})>z\overline{z}$$
$$1+(z+1)(\overline{z}+1)>z\overline{z} \quad \overline{1}=1$$
$$1+z\overline{z}+z+\overline{z}+1>z\overline{z}$$
$$z+\overline{z}>-2$$
$$\therefore \frac{z+\overline{z}}{2}>-1$$

$z=a+bi$ とするとき
$z+\overline{z}=2a$ だから
$\frac{z+\overline{z}}{2}=a$
つまり
$\frac{z+\overline{z}}{2}=z$ の実部
となる.

共役複素数と絶対値
$$|z|=|\overline{z}|$$
$$|z|^2=z\overline{z}$$

和・差・積・商の共役複素数
$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$
$$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$$
$$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$
(ただし $z_2 \neq 0$ とする)

②より
$$1+z\overline{z}>(z+1)(\overline{z+1})$$
$$1+z\overline{z}>(z+1)(\overline{z}+1)$$
$$1+z\overline{z}>z\overline{z}+z+\overline{z}+1$$
$$0>z+\overline{z}$$
$$\therefore 0>\frac{z+\overline{z}}{2}$$

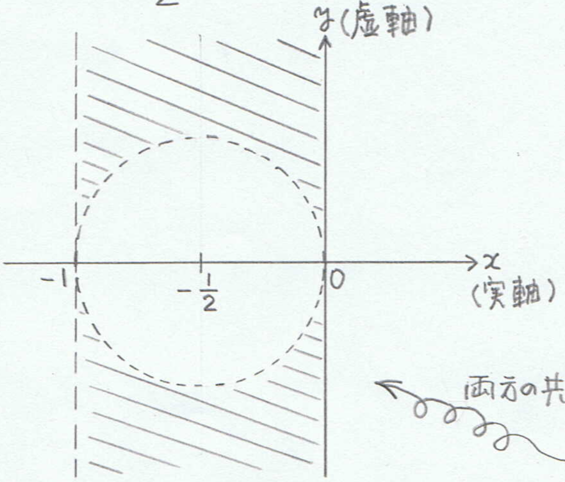
③より
$$(z+1)(\overline{z+1})+z\overline{z}>1$$
$$(z+1)(\overline{z}+1)+z\overline{z}>1$$
$$z\overline{z}+z+\overline{z}+1+z\overline{z}>1$$
$$2z\overline{z}+z+\overline{z}>0$$
$$z\overline{z}+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}>0$$
$$\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}>0$$
$$\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{4}$$
$$\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right)>\frac{1}{4}$$
$$\left|z+\frac{1}{2}\right|^2>\frac{1}{4}$$
$$\therefore \left|z+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$$

$\left|z+\frac{1}{2}\right|=\left|z-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|$ は 2点 z, $-\frac{1}{2}$ 間の距離だから正

つまり $\left|z-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|>\frac{1}{2}$

したがって

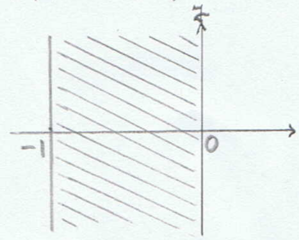
$$-1 < \frac{z+\bar{z}}{2} < 0 \quad \text{かつ} \quad \left| z - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| > \frac{1}{2}$$



両方の共通の範囲

$-1 < \frac{z+\bar{z}}{2} < 0$ は

$-1 <$ 点 z の実部 < 0 を表している。



$\left| z - \left(-\frac{1}{2}\right) \right|$ は

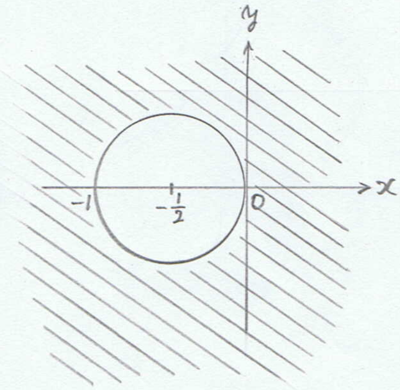
点 z と点 $-\frac{1}{2}$ の間の距離を表しているので、

もしも、$\left| z - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \frac{1}{2}$ となっていたら

点 $-\frac{1}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円周上の点が z であることを表している。

だから $\left| z - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| > \frac{1}{2}$ は

点 $-\frac{1}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円周の外の点が z であることを表している。



求める z の範囲は上図の斜線部である。

ただし、境界を含まない。