第　4　問

以下の問いに答えよ。ただし, (1) については, 結論のみを書けばよい。

(1) n を正の整数とし, 3^n を 10 で割った余りを a_n とする。a_n を求めよ。

(2) n を正の整数とし, 3^n を 4 で割った余りを b_n とする。b_n を求めよ。

(3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。

(1)

$n=1$ のとき $3^1=3$ ---- 10で割った余り $a_1=3$

$n=2$ 〃 $3^2=9$ ---- 〃 $a_2=9$

$n=3$ 〃 $3^3=27$ ---- 〃 $a_3=7$

$n=4$ 〃 $3^4=81$ ---- 〃 $a_4=1$

周期は4？

$n=5$ 〃 $3^5=243$ ---- 〃 $a_5=3$

$n=6$ 〃 $3^6=729$ ---- 〃 $a_6=9$

そこで 3^m と 3^{m+4} の関係を調べてみる。

$$3^{m+4}=3^m\times 3^4=3^m\times 81=3^m\times(80+1)=3^m\times(10\times 8+1)$$

$$=\underbrace{10\times 8\times 3^m}_{\text{10の倍数（10で割ると余り0）}}+3^m$$

すると 3^{m+4} を10で割った余りと、3^m を10で割った余りが、等しいことがわかる。

つまり余りの周期が4であるといえる。

よって、 $k=0,1,2,3$ ---- として

$n=4k+1$ のとき $a_n=3$

$n=4k+2$ のとき $a_n=9$

$n=4k+3$ のとき $a_n=7$

$n=4k+4$ のとき $a_n=1$ となる。

(2)

$n=1$ のとき　$3^1=3$ ---- 4で割った余り $b_1=3$
$n=2$ 〃　$3^2=9$ ---- 〃 $b_2=1$　} 周期は2？
$n=3$ 〃　$3^3=27$ ---- 〃 $b_3=3$
$n=4$ 〃　$3^4=81$ ---- 〃 $b_4=1$
$n=5$ 〃　$3^5=243$ ---- 〃 $b_5=3$
$n=6$ 〃　$3^6=729$ ---- 〃 $b_6=1$

そこで 3^m と 3^{m+2} の関係を調べてみる。

$$3^{m+2}=3^m\times3^2=3^m\times9=3^m\times(8+1)=3^m\times(4\times2+1)$$
$$=\underbrace{4\times2\times3^m}_{4の倍数(4で割ると余り0)}+3^m$$

すると 3^{m+2} を4で割った余りと、3^m を4で割った余りが、等しいことがわかる。

つまり　余りは周期が2であるといえる。

よって、$k=0,1,2,3,\cdots\cdots$ として

$n=2k+1$ のとき　$b_n=3$

$n=2k+2$ のとき　$b_n=1$　となる。

(3)

$x_1 = 1$ ----- 10で割った余り 1

$x_2 = 3^{x_1} = 3^1 = 3$ ----- 〃 3

$x_3 = 3^{x_2} = 3^3 = 27$ ----- 〃 7

$x_4 = 3^{x_3} = 3^{27}$

⋮

$x_{n+1} = 3^{x_n}$

⋮

$x_9 = 3^{x_8}$

$x_{10} = 3^{x_9}$

・ここでまずわかることは $x_{n+1} = 3^{x_n}$ より x_n は奇数であるということ。

次に $x_{10} = 3^{x_9}$ だから x_{10} は3の何乗かがわかれば、余りは(1)の結果が使える。

そこで x_9 がどんな数かを考えればよい。

$x_9 = 3^{x_8}$ となっており，この x_8 は当然奇数だから

$k = 0, 1, 2, 3,$ ---- として

$x_9 = 3^{2k+1}$

と表せる。

すると(2)の結果より、x_9 は4で割ると余りが3となることがわかる。

つまり $k = 0, 1, 2, 3,$ ---- として

$x_9 = 4k + 3$

したがって

$x_{10} = 3^{4k+3}$

となるので (1)の結果を使って

x_{10} は10で割ると7余る。

別　解

(1)

$n=1$ のとき $3^1=3$ ---- 10で割った余り $a_1=3$

$n=2$ 〃 $3^2=9$ ---- 〃 $a_2=9$

$n=3$ 〃 $3^3=27$ ---- 〃 $a_3=7$

$n=4$ 〃 $3^4=81$ ---- 〃 $a_4=1$

周期は4？

$n=5$ 〃 $3^5=243$ ---- 〃 $a_5=3$

$n=6$ 〃 $3^6=729$ ---- 〃 $a_6=9$

そこで 3^m と 3^{m+4} の関係を調べてみる。

$$3^{m+4}=3^m\times3^4=3^m\times81=3^m\times(80+1)=3^m\times(10\times8+1)$$
$$=\underbrace{10\times8\times3^m}_{10\text{の倍数}(10\text{で割ると余り}0)}+3^m$$

すると 3^{m+4}を10で割った余りと 3^mを10で割った余りが等しいことがわかる。

つまり余りの周期が4であるといえる。

よって、 kを自然数として

$n=4k-3$ のとき $a_n=3$

$n=4k-2$ のとき $a_n=9$

$n=4k-1$ のとき $a_n=7$

$n=4k$ のとき $a_n=1$ となる。

別解

(2)

$n=1$ のとき $3^1=3$ ---- 4で割った余り $b_1=3$

$n=2$ 〃 $3^2=9$ ---- 〃 $b_2=1$

$n=3$ 〃 $3^3=27$ ---- 〃 $b_3=3$

$n=4$ 〃 $3^4=81$ ---- 〃 $b_4=1$

$n=5$ 〃 $3^5=243$ ---- 〃 $b_5=3$

$n=6$ 〃 $3^6=729$ ---- 〃 $b_6=1$

周期は2？

そこで 3^m と 3^{m+2} の関係を調べてみる。

$$3^{m+2}=3^m\times 3^2=3^m\times 9=3^m\times(8+1)=3^m\times(4\times 2+1)$$

$$=\underbrace{4\times 2\times 3^m}_{4\text{の倍数}(4\text{で割ると余り}0)}+3^m$$

すると 3^{m+2} を4で割った余りと、3^m を4で割った余りが、等しいことがわかる。

つまり 余りは周期が2であるといえる。

よって、k を自然数として

$n=2k-1$ のとき $b_n=3$

$n=2k$ のとき $b_n=1$ となる。

別　解

(3)

$x_1 = 1$ ---- 10で割った余り 1

$x_2 = 3^{x_1} = 3^1 = 3$ ---- 〃 3

$x_3 = 3^{x_2} = 3^3 = 27$ ---- 〃 7

$x_4 = 3^{x_3} = 3^{27} = \boxed{}$ ---- 〃 $\boxed{}$

⋮

$x_8 = 3^{x_7}$

$x_9 = 3^{x_8}$

$x_{10} = 3^{x_9}$

ここで まず わかることは $x_{n+1} = 3^{x_n}$ より x_n は奇数であるといえる。

次に、$x_{10} = 3^{x_9}$ だから、x_{10} は 3の何乗かがわかれば (1)の結果が使える。

そこで x_9 がどんな数であるかを調べてみる。

$$x_9 = 3^{x_8} = (4-1)^{x_8} = \{4+(-1)\}^{x_8} = \sum_{r=0}^{x_8} {}_{x_8}C_r 4^{x_8-r}\cdot(-1)^r$$ ← 2項定理

$$= \underbrace{{}_{x_8}C_0 4^{x_8} + {}_{x_8}C_1 4^{x_8-1}\cdot(-1)^1 + {}_{x_8}C_2 4^{x_8-2}\cdot(-1)^2 + \cdots\cdots + {}_{x_8}C_{x_8-1} 4\cdot(-1)^{x_8-1}}_{4の倍数} + \underbrace{{}_{x_8}C_{x_8}(-1)^{x_8}}_{-1}$$

x_8 は奇数

すると x_9 は 4の倍数 −1 となっていることがわかったので

$x_{10} = 3^{4の倍数-1}$ つまり kを自然数として $x_{10} = 3^{4k-1}$

だから (1) の結果より、x_{10} は 10で割ると 7余る。