第　5　問

k を正の整数とし，10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる。ここで，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$ は 0 から 9 までの整数で，$a_k \fallingdotseq 0$ とする。

(1) 次の不等式をみたす正の整数 n をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{n} - 10^k < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(2) p が $5\cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式をみたす正の整数 m が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{m} - p < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(3) 実数 x に対し，$r \leqq x < r+1$ をみたす整数 r を $[x]$ で表す。$\sqrt{s} - [\sqrt{s}\,] = 0.a_1a_2\cdots a_k$ をみたす正の整数 s は存在しないことを示せ。

(1) $0.a_1a_2\cdots a_k=\dfrac{a_1}{10}+\dfrac{a_2}{10^2}+\cdots+\dfrac{a_k}{10^k}=a$ とおくと　$0<a<1$ となり，

与えられた不等式は次のように書き表せる．

$$a\leqq\sqrt{n}-10^k<a+10^{-k}$$

この不等式を変形していくと

$$10^k+a\leqq\sqrt{n}<10^k+a+10^{-k}$$

各辺ともそれぞれ正なので，全辺を2乗すると

$$(10^k+a)^2\leqq n<(10^k+a+10^{-k})\ \text{------}①$$

ここで，①の左辺 $=(10^k+a)^2=\underbrace{10^{2k}}_{正の整数}+2a\cdot10^k+a^2$ となり

$$2a\cdot10^k=2\left(\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}\right)\cdot10^k$$
$$=2(10^{k-1}a_1+10^{k-2}a_2+\cdots+a_k)$$

だから　$2a\cdot10^k$ は正の整数であることがわかり，

また　$0<a<1$ より　$0<a^2<1$ であるから

$n\geqq\underbrace{10^{2k}+2a\cdot10^k}_{正の整数}+\underbrace{a^2}_{0<a^2<1}$ より　正の整数 n は次のようになっている。

$$n\geqq10^{2k}+2a\cdot10^k+1\ \text{------}②$$

次に，①の右辺 $=(10^k+a+10^{-k})^2$

$$=10^{2k}+2(a+10^{-k})\cdot10^k+(a+10^{-k})^2$$
$$=10^{2k}+2a\cdot10^k+2\cdot10^{-k}\cdot10^k+(a+10^{-k})^2$$
$$=\underbrace{10^{2k}+2a\cdot10^k+2}_{正の整数}+(a+10^{-k})^2\ \text{となり}$$

等号がつくのは？
例えば　$a=0.999$
のとき $k=3$ となるので
$10^{-3}=\dfrac{1}{10^3}=0.001$
すると $a+10^{-3}=1$
となるから。

$0<a+10^{-k}\leqq1$ だから　$0<(a+10^{-k})^2\leqq1$ となり

$n<\underbrace{10^{2k}+2a\cdot10^k+2}_{正の整数}+\underbrace{(a+10^{-k})^2}_{0<(a+10^{-k})^2\leqq1}$ より　正の整数 n は次のようになっている。

$$n<10^{2k}+2a\cdot10^k+2+1\ \text{-------}③$$

したがって ②，③ から

求める正の整数 n は

$$n=10^{2k}+2a\cdot10^k+1=10^{2k}+2(10^{k-1}a_1+10^{k-2}a_2+\cdots+a_k)+1,$$
$$10^{2k}+2a\cdot10^k+2=10^{2k}+2(10^{k-1}a_1+10^{k-2}a_2+\cdots+a_k)+2$$

(2) $0.a_1a_2\cdots a_k = \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + \cdots + \dfrac{a_k}{10^k} = a$ とおくと $0<a<1$ となり

与えられた不等式は次のように書き表せる.

$$a \leqq \sqrt{m} - p < a + 10^{-k}$$

この不等式を変形していくと

$$p + a \leqq \sqrt{m} < p + a + 10^{-k}$$

各辺ともそれぞれ正なので. 全辺を2乗すると

$$(p+a)^2 \leqq m < (p+a+10^{-k})^2$$

ここで、右辺から左辺を引いてみると

$$\begin{aligned}
&(p+a+10^{-k})^2 - (p+a)^2 \\
&= (p+a)^2 + 2(p+a)\cdot 10^{-k} + 10^{-2k} - (p+a)^2 \\
&= 2p\cdot 10^{-k} + 2a\cdot 10^{-k} + 10^{-2k} \\
&\geqq 2\cdot 5\cdot 10^{k-1}\cdot 10^{-k} + 2a\cdot 10^{-k} + 10^{-2k} \\
&= 10\cdot 10^{k-1}\cdot 10^{-k} + 2a\cdot 10^{-k} + 10^{-2k} \\
&= 1 + 2a\cdot 10^{-k} + 10^{-2k} \\
&> 1
\end{aligned}$$

正の数

例.

$7 \leqq \boxed{} < 8.1$

正整数存在する.

つまり $(p+a+10^{-k})^2 - (p+a)^2 > 1$ となっているから

与えられた不等式をみたす正の整数 m は存在する。

(3)

方法

「存在しないことを示せ。」だから、

「存在する」と仮定して、$\boxed{\text{矛盾}}$を発生させる背理法を使う。

$\sqrt{5}-[\sqrt{5}]=0.a_1a_2\cdots a_k$ となる正の整数 S が存在すると仮定する。

すると $\sqrt{5}=\underbrace{[\sqrt{5}]}_{\text{整数}}-\underbrace{0.a_1a_2\cdots a_k}_{\text{有限小数}}$ と変形すると、これは有理数であるから

互いに素である正の整数 p, q を用いて

$\sqrt{5}=\dfrac{q}{p}$ とおくことができる。

このとき $S=\dfrac{q^2}{p^2}$ は整数であり、しかも p^2 と q^2 は互いに素

であるから、$p^2=1$ となるので $p=1$

すると $\sqrt{5}=\underbrace{q}_{\text{正の整数}}$ となり

$\sqrt{5}-[\sqrt{5}]=q-[q]=q-q=0$

これは $\sqrt{5}-[\sqrt{5}]=0.a_1a_2\cdots a_k$ に矛盾する。

ゆえに条件をみたす正の整数 S は存在しない。