第　1　問

実数 a, b に対して

$$f(\theta) = \cos 3\theta + a\cos 2\theta + b\cos\theta$$

とし，$0 < \theta < \pi$ で定義された関数

$$g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos\theta - 1}$$

を考える。

(1) $f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x = \cos\theta$ の整式で表せ。

(2) $g(\theta)$ が $0 < \theta < \pi$ の範囲で最小値 0 をとるための a, b についての条件を求めよ。
また，条件をみたす点 $(a,\ b)$ が描く図形を座標平面上に図示せよ。

(1)

$$f(\theta) = \cos 3\theta + a\cos 2\theta + b\cos\theta$$
$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + a(2\cos^2\theta - 1) + b\cos\theta$$
$$= 4x^3 - 3x + a(2x^2-1) + bx$$
$$= 4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a$$

$f(0) = 1 + a + b$ より

$$g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos\theta - 1}$$
$$= \frac{4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a - (1+a+b)}{x-1}$$

分子に因数定理を使用.

$$= \frac{(x-1)\{4x^2 + (2a+4)x + (2a+b+1)\}}{x-1}$$
$$= 4x^2 + (2a+4)x + 2a+b+1$$

(2) 2次関数 $g(\theta)$ の頂点の座標を求めてみる。

$$g(\theta) = 4x^2 + (2a+4)x + 2a+b+1$$
$$= 4\left(x^2 + \frac{2a+4}{4}x\right) + 2a+b+1$$
$$= 4\left(x^2 + \frac{a+2}{2}x\right) + 2a+b+1$$
$$= 4\left\{x^2 + \frac{a+2}{2}x + \left(\frac{a+2}{4}\right)^2 - \left(\frac{a+2}{4}\right)^2\right\} + 2a+b+1$$
$$= 4\left(x + \frac{a+2}{4}\right)^2 - 4\times\left(\frac{a+2}{4}\right)^2 + 2a+b+1$$
$$= 4\left(x + \frac{a+2}{4}\right)^2 - \frac{(a+2)^2}{4} + 2a+b+1$$
$$= 4\left(x + \frac{a+2}{4}\right)^2 - \frac{a^2+4a+4-8a-4b-4}{4}$$
$$= 4\left(x + \frac{a+2}{4}\right)^2 - \frac{a^2-4a-4b}{4}$$

2次関数 $g(\theta)$ の頂点の座標は $\left(-\frac{a+2}{4}, -\frac{a^2-4a-4b}{4}\right)$ である。

$g(\theta)$ は下に凸の放物線であるから、頂点で最小値をとる。

そこで、$0<\theta<\pi$ より $-1<\cos\theta<1$ だから $-1<x<1$ となるので.

$-1 < -\frac{a+2}{4} < 1$ となる必要がある。

$-4 < -(a+2) < 4$

$4 > a+2 > -4$

$4-2 > a > -4-2$

つまり

$-6 < a < 2$ となる。

また、最小値0をとるから

$$-\frac{a^2-4a-4b}{4}=0$$

$$a^2-4a-4b=0$$

$$4b=a^2-4a$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{4}a^2-a \\ &= \frac{1}{4}(a^2-4a) \\ &= \frac{1}{4}(a^2-4a+4-4) \\ &= \frac{1}{4}(a-2)^2-1 \end{aligned}$$

したがって求めるa, bについての条件は

$-6<a<2$ かつ $b=\frac{1}{4}(a-2)^2-1$

また、(a, b)が描く図形は下図。ただし両端点は含まない。