第　2　問

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点Pを考える。

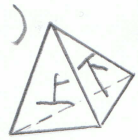
(a) 最初に，点Pは原点Oにある。

(b) ある時刻で点Pが格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その1秒後の点Pの位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$, $(m,\ n+1)$, $(m-1,\ n)$, $(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1) 点Pが，最初から6秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

(2) 点Pが，最初から6秒後に原点Oにある確率を求めよ。

正四面体のサイコロを考える。(これを四面サイコロと呼ぶ。)



各面には、上，下，右，左 と書かれている。

この四面サイコロを投げたとき、底面に書かれた文字を出た目とする。

そして、目の出方は、それぞれ確率 $\frac{1}{4}$ とする。

さて、点Pは、四面サイコロを投げて、出た目で移動すればよいから

上が出たら、上に1つ移動するから、y座標が1増える。つまり y座標$+1$

下が出たら、下に1つ移動するから、y座標が1減る。つまり y座標-1

右が出たら、右に1つ移動するから、x座標が1増える。つまり x座標$+1$

左が出たら、左に1つ移動するから、x座標が1減る。つまり x座標-1

ということになる。

(1) 1秒ごとに四面サイコロを投げて出た目の移動をするが、
点Pは原点(0, 0)からスタートするので、6秒後の点Pの座標は、
6回移動し終えたときの，x軸方向，y軸方向それぞれの
移動した数の和が、点Pの6秒後の座標となる

+1とか−1

例えば、四面サイコロを6回投げて

左，左，上，右，下，下

と出たら

原点(0, 0)スタート

x軸方向は $0 \underline{-1} \underline{-1} \underline{+1} = -1$

y軸方向は $0 \underline{+1} \underline{-1} \underline{-1} = -1$

よって

6秒後の点Pの座標は $(-1, -1)$ となる。

example

- 1秒後にサイコロ投げて右が出たら、x座標が1増えるのだから
  x座標$+1 = 0+1 = 1$
  つまり 1秒後の点Pの座標は
  $(1, 0)$ となる。
- 次に2秒後にサイコロ投げて下が出たら、y座標が1減るのだから
  y座標$-1 = 0-1 = -1$
  つまり 2秒後の点Pの座標は
  $(1, -1)$ となる。
- 次に3秒後にサイコロ投げて右が出たら、x座標が1増えるのだから
  x座標$+1 = 1+1 = 2$
  つまり 3秒後の点Pの座標は
  $(2, -1)$ となる。

点Pが 原点Oをスタートして6秒後までに四面サイコロを6回投げて

上 ---- a回, 下 ---- b回, 右 ---- r回, 左 ---- s回

出たとすると、

$$a+b+r+s=6 \quad \text{-------} ①$$

であり、6秒後の点Pの座標は

x座標 $(+1)\times r+(-1)\times s=r-s$

y座標 $(+1)\times a+(-1)\times b=a-b$

となる。そして、6秒後に点Pが直線 $y=x$ 上にあるためには

$$a-b=r-s$$

つまり $a+s=b+r$ ------- ②

でなくてはならない。

①, ② から $a+s=b+r=3$ ------- ③

そこで、これから、四面サイコロを6回投げたとき③となる確率を求めていく。

ここで $(\overset{上}{a}, \overset{下}{b}, \overset{右}{r}, \overset{左}{s})$ が③となるような場合をさがしていく。

3回

3回

(ア) (3, 0, 3, 0), (0, 3, 0, 3), (3, 3, 0, 0), (0, 0, 3, 3)

(イ) (2, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 2), (2, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 2)

(ウ) (3, 2, 1, 0), (3, 1, 2, 0), (0, 2, 1, 3), (0, 1, 2, 3)

(エ) (1, 3, 0, 2), (2, 3, 0, 1), (1, 0, 3, 2), (2, 0, 3, 1)

上の(ア)～(エ)の4種類が③を満たしていることがわかる。

そこで、それぞれの場合の数が何通りあるか数え上げていく。

(ア) (3, 0, 3, 0) ---- サイコロ6回投げて, 上3回, 右3回 ---- ${}_6C_3\times{}_3C_3=20$通り

(0, 3, 0, 3) ---- 〃 , 下3回, 左3回 ---- 〃 〃

(3, 3, 0, 0) ---- 〃 , 上3回, 下3回 ---- 〃 〃

(0, 0, 3, 3) ---- 〃 , 右3回, 左3回 ---- 〃 〃

(イ) (2, 1, 2, 1) ---- サイコロ6回投げて、上2回, 下1回, 右2回, 左1回 --- ${}_6C_2 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1$

$= 180$ 通り

(1, 2, 1, 2) ---- 〃 , 上1回, 下2回, 右1回, 左2回 ---- ${}_6C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_2$

$= 180$ 通り

(2, 2, 1, 1) ---- 〃 , 上2回, 下2回, 右1回, 左1回 ---- ${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1$

$= 180$ 通り

(1, 1, 2, 2) ---- 〃 , 上1回, 下1回, 右2回, 左2回 --- ${}_6C_1 \times {}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2$

$= 180$ 通り

(ウ) (3, 2, 1, 0) ---- 〃 , 上3回, 下2回, 右1回 ---- ${}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 = 60$ 通り

(3, 1, 2, 0) ---- 〃 , 上3回, 下1回, 右2回 ---- ${}_6C_3 \times {}_3C_1 \times {}_2C_2 = 60$ 通り

(0, 2, 1, 3) ---- 〃 , 下2回, 右1回, 左3回 ---- ${}_6C_2 \times {}_4C_1 \times {}_3C_3 = 60$ 通り

(0, 1, 2, 3) ---- 〃 , 下1回, 右2回, 左3回 ---- ${}_6C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 = 60$ 通り

(エ) (1, 3, 0, 2) ---- 〃 , 上1回, 下3回, 左2回 ---- ${}_6C_1 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 = 60$ 通り

(2, 3, 0, 1) ---- 〃 , 上2回, 下3回, 左1回 ---- ${}_6C_2 \times {}_4C_3 \times {}_1C_1 = 60$ 通り

(1, 0, 3, 2) ---- 〃 , 上1回, 右3回, 左2回 ---- ${}_6C_1 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 = 60$ 通り

(2, 0, 3, 1) ---- 〃 , 上2回, 右3回, 左1回 ---- ${}_6C_2 \times {}_4C_3 \times {}_1C_1 = 60$ 通り

したがって、四面サイコロ6回投げたとき、点Pが直線 $y = x$ 上にある場合の数は、 $20 \times 4 + 180 \times 4 + 60 \times 8 = 80 + 720 + 480 = 1280$ 通り。

そして、四面サイコロ6回投げたときの目の出方は $4^6 = 4096$ 通り。

よって、点Pが6秒後に直線 $y = x$ 上にある確率は

$$\frac{1280}{4096} = \frac{5}{16}$$ である。

(2) 原点Oをスタートした点Pが6秒後に原点Oにもどるためには

四面サイコロを6回投げたとき、

上の目が出た回数と、下の目が出た回数が等しく、

かつ

右の目が出た回数と、左の目が出た回数が等しくなくてはならない。

つまり

$\overset{上}{a}+\overset{下}{b}+\overset{右}{r}+\overset{左}{s}=6$ ----①

$a=b,\ r=s$ --------④

でなくてはならない。

①, ④から $a+r=b+s=3$ ----⑤

そこで、四面サイコロを6回投げたとき⑤となる確率を求めていく。

ここで、$(\overset{上}{a}, \overset{下}{b}, \overset{右}{r}, \overset{左}{s})$が⑤となるような場合をさがしていく。

3回

3回

(3, 3, 0, 0)----サイコロ6回投げて、上3回, 下3回 ---- ${}_6C_3 \times {}_3C_3 = 20$通り

(0, 0, 3, 3)---- 〃 右3回, 左3回 ---- 〃 〃

(2, 2, 1, 1)---- 〃 上2回, 下2回, 右1回, 左1回 --- ${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1$

$= 180$通り

(1, 1, 2, 2)---- 〃 上1回, 下1回, 右2回, 左2回 --- ${}_6C_1 \times {}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2$

$= 180$通り

したがって、四面サイコロを6回投げたとき、点Pが原点Oにある場合の数は $20 \times 2 + 180 \times 2 = 40 + 360 = 400$通り

そして、四面サイコロ6回投げたときの目の出方は $4^6 = 4096$通り

よって、点Pが6秒後に原点Oにある確率は

$\dfrac{400}{4096} = \dfrac{25}{256}$ である。