第　3　問

複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w = \dfrac{1}{z}$ とする。

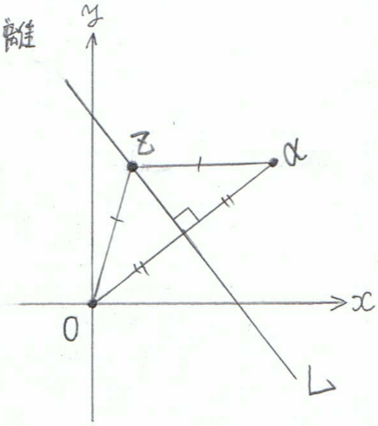
(1) α を 0 でない複素数とし，点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2) 1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。

(1)

点zが点α $(\alpha \neq 0)$と原点0を結ぶ線分の垂直二等分線上にあるので

$|z-\alpha| = |z-0|$ → 点zと点αの距離＝点zと原点の距離



つまり

$|z-\alpha| = |z|$ ----①

ここで　$w = \dfrac{1}{z}$ だから　$w \neq 0$ のとき

$z = \dfrac{1}{w}$　となるので

これを①に代入すると

$$\left|\frac{1}{w} - \alpha\right| = \left|\frac{1}{w}\right|$$

$$\left|\frac{1-\alpha w}{w}\right| = \left|\frac{1}{w}\right|$$

$$\frac{|1-\alpha w|}{|w|} = \frac{1}{|w|}$$

$$|1-\alpha w| = 1$$

$$|\alpha w - 1| = 1$$

$$\left|\alpha\left(w - \frac{1}{\alpha}\right)\right| = 1$$

$$|\alpha|\left|w - \frac{1}{\alpha}\right| = 1$$

$\therefore \left|w - \dfrac{1}{\alpha}\right| = \dfrac{1}{|\alpha|}$ → 点wと点$\dfrac{1}{\alpha}$の距離が$\dfrac{1}{|\alpha|}$

よって　点wの軌跡は

点$\dfrac{1}{\alpha}$を中心とし半径$\dfrac{1}{|\alpha|}$の円であり、$w \neq 0$ より原点0を除く。

(2)

$x^3 = 1$ より

$x^3 - 1 = 0$

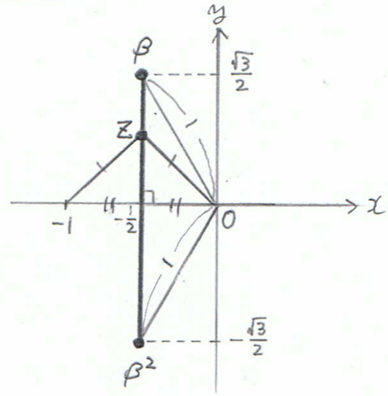
$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore x = 1,\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

すると　$\beta = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ で、

$\beta^2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ となる。

ここで、点zは右図のように点βと点β^2を結ぶ線分上にあるので、
点zは、点-1と原点0を結ぶ線分の垂直二等分線上にあり、そして
点zと原点0との距離は右図から



$$\frac{1}{2} \leqq |z-0| \leqq 1$$

だから

$$\frac{1}{2} \leqq |z| \leqq 1 \quad \text{----} ②$$

となっていることもわかる。

そこで(1)の結果より、$\alpha=-1$として

(1)の結果は、
$\left|w-\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{|\alpha|}$, $w \neq 0$

$$\left|w-\frac{1}{-1}\right|=\frac{1}{|-1|} \quad (w \neq 0)$$

$$|w+1|=1$$

$$|w-(-1)|=1$$ 点wと点-1の距離が1

しかも ②より

$$\frac{1}{2} \leqq \left|\frac{1}{w}\right| \leqq 1$$

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{|w|} \leqq 1$$

つまり $1 \leqq |w| \leqq 2$

したがって、点wの軌跡は

点-1を中心とし半径1の円のうち、
点wと原点0との距離が

$$1 \leqq |w-0| \leqq 2$$

となっている範囲である。

右図の太線部分で
端点を含む。