第　4　問

$p = 2 + \sqrt{5}$ とおき，自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい。

(1) $a_1,\ a_2$ の値を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ とする。積 $a_1 a_n$ を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n は自然数であることを示せ。

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

(1)

$p = 2+\sqrt{5}$ より

$$-\frac{1}{p} = -\frac{1}{2+\sqrt{5}} = -\frac{2-\sqrt{5}}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = -\frac{2-\sqrt{5}}{4-5} = -\frac{2-\sqrt{5}}{-1} = 2-\sqrt{5}$$

ここで $q = 2-\sqrt{5}$ とおくと

$a_n = p^n + q^n$ と表せる。

また

$$\begin{cases} p+q = 2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5} = 4 \\ pq = (2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5}) = 4-5 = -1 \end{cases}$$

となる。

そこで

$a_1 = p^1 + q^1 = 4$

$a_2 = p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq = 4^2 - 2\times(-1) = 18$

(2)

$n \geqq 2$ で

$$\begin{aligned} a_1 a_n &= (p+q)(p^n+q^n) \\ &= p^{n+1} + pq^n + qp^n + q^{n+1} \\ &= p^{n+1} + q^{n+1} + pq(q^{n-1}+p^{n-1}) \\ &= p^{n+1} + q^{n+1} + (-1)(p^{n-1}+q^{n-1}) \\ &= p^{n+1} + q^{n+1} - (p^{n-1}+q^{n-1}) \\ &= a_{n+1} - a_{n-1} \end{aligned}$$

(3)

数学的帰納法を用いる。

(I) $n=1$ のとき $a_1 = 4$, $n=2$ のとき $a_2 = 18$ だから

$n=1, 2$ のとき、a_1, a_2 は自然数である。

(II) $n=k, k+1$ のとき, a_k, a_{k+1} が自然数であると仮定する。

(2) より $a_1 a_{k+1} = a_{k+2} - a_k$

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= a_1 a_{k+1} + a_k \\ &= 4a_{k+1} + a_k \end{aligned}$$

となるので a_{k+2} も自然数であるから、$n=k+2$ のときも自然数である。

(I), (II) から、すべての自然数 n について、a_n は自然数である。

(4)

ユークリッドの互除法を用いる。

自然数 a を自然数 b で割った商を q, 余りを r とすると、
a と b の最大公約数は, b と r の最大公約数に等しい。

$a \div b = q$ 余り r より a と b の G.C.M. = b と r の G.C.M.

(2)の結果から

$4a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$ より

$a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}$ これは $a_{n+1} \div a_n = 4$ 余り a_{n-1} だから a_{n+1} と a_n の G.C.M. = a_n と a_{n-1} の G.C.M.

$a_n = 4a_{n-1} + a_{n-2}$ 〃 $a_n \div a_{n-1} = 4$ 余り a_{n-2} 〃 a_n と a_{n-1} の G.C.M. = a_{n-1} と a_{n-2} の G.C.M.

$a_{n-1} = 4a_{n-2} + a_{n-3}$ 〃 $a_{n-1} \div a_{n-2} = 4$ 余り a_{n-3} 〃 a_{n-1} と a_{n-2} の G.C.M. = a_{n-2} と a_{n-3} の G.C.M.

$a_{n-2} = 4a_{n-3} + a_{n-4}$ 〃 $a_{n-2} \div a_{n-3} = 4$ 余り a_{n-4} 〃 a_{n-2} と a_{n-3} の G.C.M. = a_{n-3} と a_{n-4} の G.C.M.

⋮

$a_3 = 4a_2 + a_1$ 〃 $a_3 \div a_2 = 4$ 余り a_1 a_3 と a_2 の G.C.M. = a_2 と a_1 の G.C.M.

つまり a_{n+1} と a_n の G.C.M = a_2 と a_1 の G.C.M. である。

そこで $a_2 = 18$, $a_1 = 4$ より

a_2 と a_1 の G.C.M. は 2 だから

a_{n+1} と a_n の G.C.M. も 2 となる。

したがって a_{n+1} と a_n の最大公約数は 2 である。