# 第　5　問

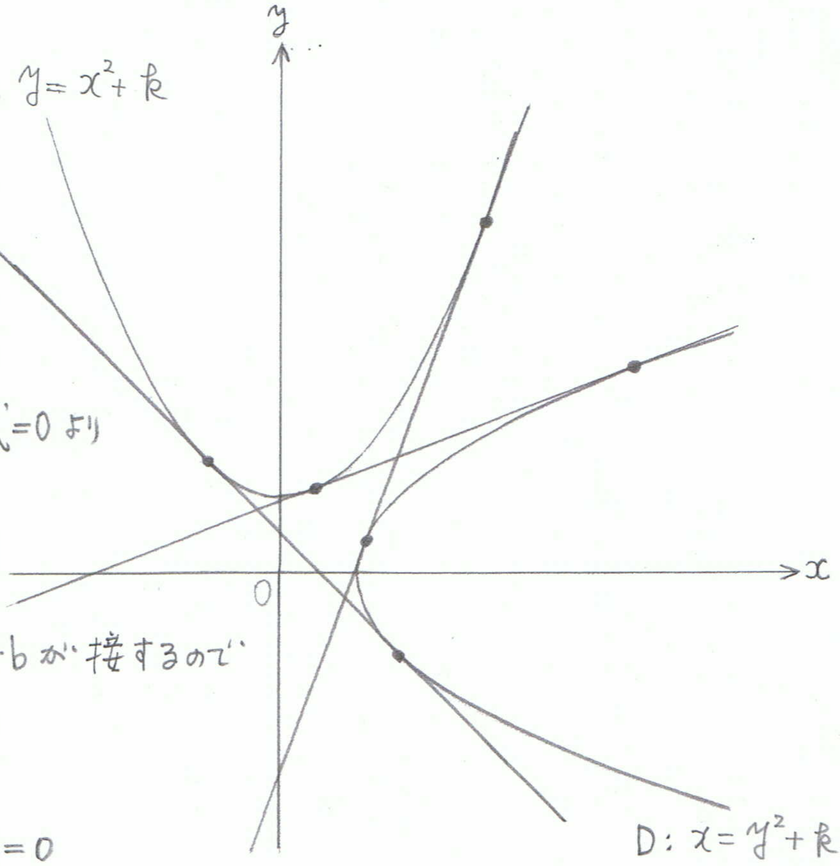
$k$ を実数とし，座標平面上で次の 2 つの放物線 $C, D$ の共通接線について考える。

$$C: \quad y = x^2 + k$$
$$D: \quad x = y^2 + k$$

(1) 直線 $y = ax + b$ が共通接線であるとき，$a$ を用いて $k$ と $b$ を表せ。ただし $a \neq -1$ とする。

(2) 傾きが 2 の共通接線が存在するように $k$ の値を定める。このとき，共通接線が 3 本存在することを示し，それらの傾きと $y$ 切片を求めよ。

## (1)




$y=x^2+k$ と $y=ax+b$ が接するので

$x^2+k=ax+b$

$x^2-ax+k-b=0$

これが重解をもつから判別式$=0$より

$(-a)^2-4\times1\times(k-b)=0$

$a^2-4k+4b=0$ ---- ①

また、$x=y^2+k$ と $y=ax+b$ が接するので

$x=(ax+b)^2+k$

$x=a^2x^2+2abx+b^2+k$

$a^2x^2+(2ab-1)x+b^2+k=0$

ここで $a=0$ なら 直線$y=ax+b$は $x$軸に平行となり放物線Dに接しないから $a\neq0$ となり、上式は2次方程式であるから、$y=ax+b$ とDが接するときは重解をもつので判別式$=0$より

$(2ab-1)^2-4\times a^2\times(b^2+k)=0$

$4a^2b^2-4ab+1-4a^2b^2-4a^2k=0$

$1-4a^2k-4ab=0$ ---- ②

①$\times a+$②より

$$\begin{array}{rl} & a^3-4ak+4ab=0 \\ +) & 1-4a^2k-4ab=0 \\ \hline & a^3+1-4ak(a+1)=0 \end{array}$$

$(a+1)(a^2-a+1)-4ak(a+1)=0$

$(a+1)(a^2-a+1-4ak)=0$ ------ ③

$a\neq-1$ より $a^2-a+1-4ak=0$ 「ただし $a\neq-1$ とする。」とあるので。

$4ak=a^2-a+1$

$a\neq0$ より $k=\dfrac{a^2-a+1}{4a}$

これを①に代入して

$a^2-4\times\dfrac{a^2-a+1}{4a}+4b=0$

$4b=-a^2+\dfrac{a^2-a+1}{a}$

$4b=\dfrac{-a^3+a^2-a+1}{a}$ よって $b=\dfrac{-a^3+a^2-a+1}{4a}$

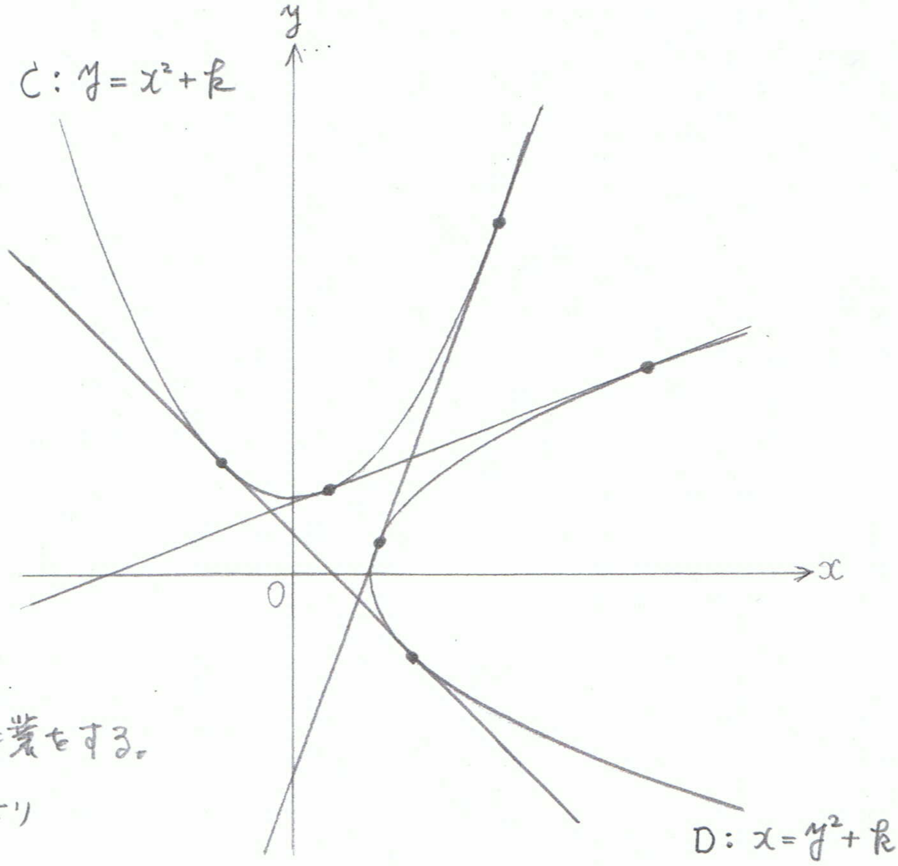
(2)

$a=2$のとき

(1)の結果 $k=\dfrac{a^2-a+1}{4a}$ より

$k=\dfrac{2^2-2+1}{4\times 2}$

$=\dfrac{3}{8}$




この $k=\dfrac{3}{8}$ のとき、

共通接線が3本

存在するというので

他のaの値を見つける作業をする。

そこで $k=\dfrac{a^2-a+1}{4a}$ より

$\dfrac{3}{8}=\dfrac{a^2-a+1}{4a}$

$8(a^2-a+1)=12a$

$2(a^2-a+1)=3a$

$2a^2-5a+2=0$

$(a-2)(2a-1)=0$

$\therefore\ a=2,\ \dfrac{1}{2}$

(1)の結果 $b=\dfrac{-a^3+a^2-a+1}{4a}$ より

$a=2$のとき $b=\dfrac{-2^3+2^2-2+1}{4\times 2}=\dfrac{-8+4-2+1}{8}=-\dfrac{5}{8}$

$a=\dfrac{1}{2}$のとき $b=\dfrac{-(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}+1}{4\times\frac{1}{2}}=\dfrac{-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}{2}=\dfrac{\frac{5}{8}}{2}=\dfrac{5}{16}$

そして、さらに他の共通接線は ③ より $a=-1$ のときだから

①, ② より

$1-4\cdot\dfrac{3}{8}+4b=0$

$1-\dfrac{3}{2}+4b=0$

$4b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ b=\dfrac{1}{8}$

したがって 求める傾きaと切片bは

$(a,b)=\left(2,-\dfrac{5}{8}\right),\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{16}\right),\left(-1,\dfrac{1}{8}\right)$