第　6　問

点 O を原点とする座標空間内で，一辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また，点 A(1, 0, 0) に対して，∠AOP を θ とおく。ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(1) 点 Q が (0, 0, 1) にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点 Q が平面 $x=0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

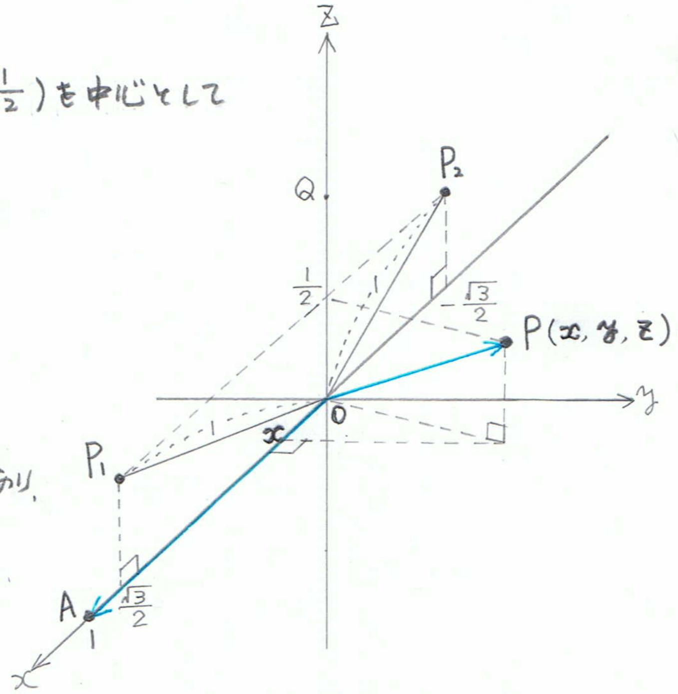
(1) 点Pの座標を(x, y, z)とおく。

点Pは平面$z=\frac{1}{2}$上で，点$(0, 0, \frac{1}{2})$を中心として半径$\frac{\sqrt{3}}{2}$の円を描くから、

点Pのx座標がとりうる値の範囲は

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{----- ①}$$

となる。



$\overrightarrow{OA}=(1, 0, 0)$，$\overrightarrow{OP}=(x, y, z)$であり，

$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OP}$のなす角をθとすると

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} = 1\times x + 0\times y + 0\times z = x$

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} &= |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|\cos\theta \\ &= 1\times 1\times\cos\theta \\ &= \cos\theta\end{aligned}$$

よって　$x=\cos\theta$　となるから

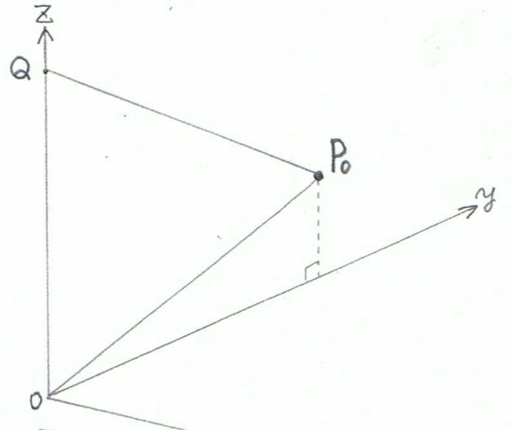
①より

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

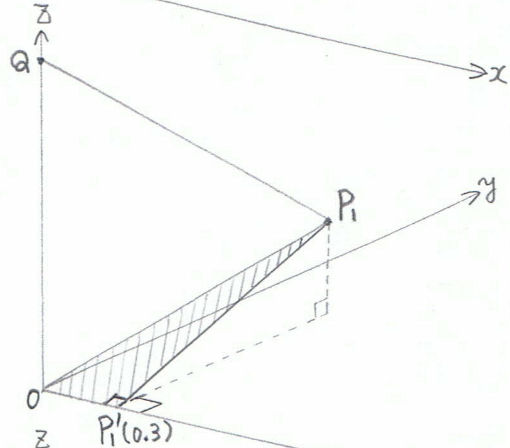
したがって、θがとりうる値の範囲は

$$30^\circ \leqq \theta \leqq 150^\circ$$

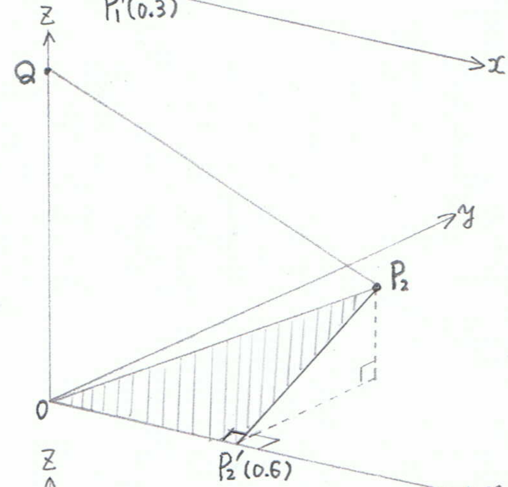
(2) (ア) 点Qが$(0,0,1)$にあって、点Pが平面$x=0$上にあるときをP_0とする。
点Qが平面$x=0$上を動くとき、この点Qは原点Oを中心として半径1の円を描くので、点P_0も同様に原点Oを中心として半径1の円を描く。



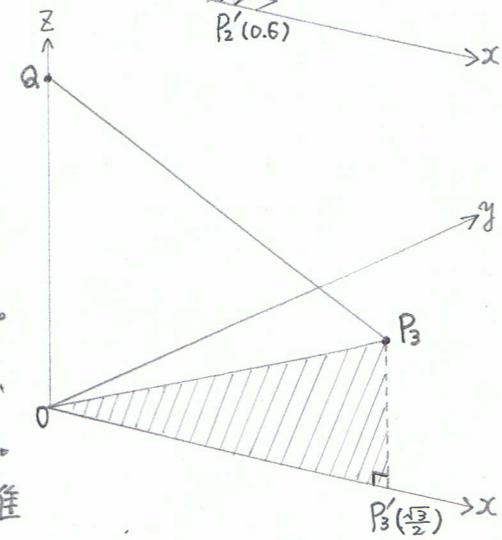
(イ) 点Qが$(0,0,1)$にあって、点Pのx座標が0.3であるときをP_1とする。
右図より、点P_1とx軸との距離はP_1P_1'であることがわかる。点Qが原点Oを中心として半径1の円を描くとき、$\triangle OP_1P_1'$はx軸のまわりを回転することがわかる。
つまり、$\triangle OP_1P_1'$は底面の半径P_1P_1'の円錐を描くから、辺OP_1はこの円錐の側面となっている。



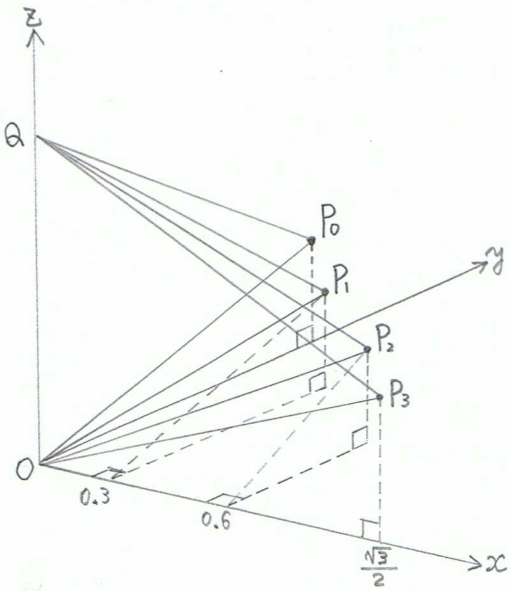
(ウ) 点Qが$(0,0,1)$にあって、点Pのx座標が0.6であるときをP_2とする。
右図より、点P_2とx軸の距離はP_2P_2'であることがわかる。点Qが原点Oを中心として半径1の円を描くとき、$\triangle OP_2P_2'$はx軸のまわりを回転することがわかる。
つまり、$\triangle OP_2P_2'$は底面の半径P_2P_2'の円錐を描くから、辺OP_2はこの円錐の側面となっている。

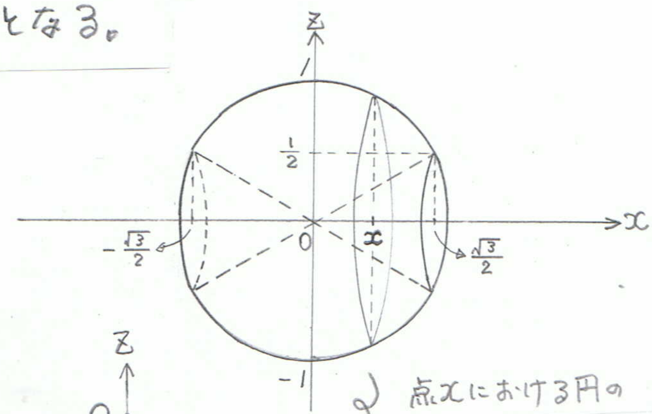


(エ) 点Qが$(0,0,1)$にあって、点Pのx座標が$\frac{\sqrt{3}}{2}$であるときをP_3とする。つまり$P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{1}{2}\right)$。
右図より、点P_3とx軸の距離は$P_3P_3'=\frac{1}{2}$である。
点Qが原点Oを中心として半径1の円を描くとき、$\triangle OP_3P_3'$はx軸のまわりを回転することがわかる。
つまり、$\triangle OP_3P_3'$は底面の半径$P_3P_3'=\frac{1}{2}$の円錐を描くから、辺OP_3はこの円錐の側面となっている。

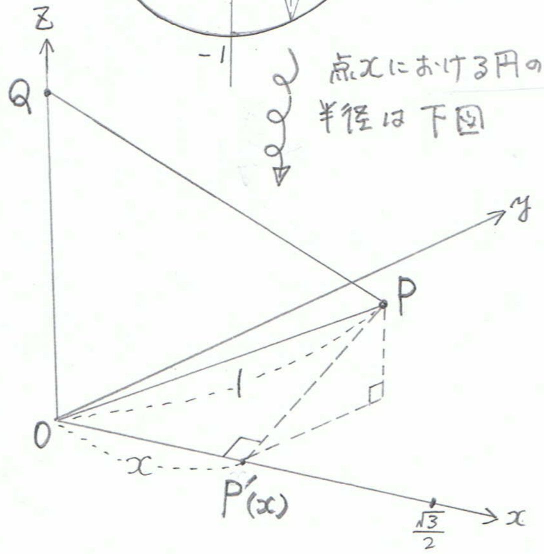


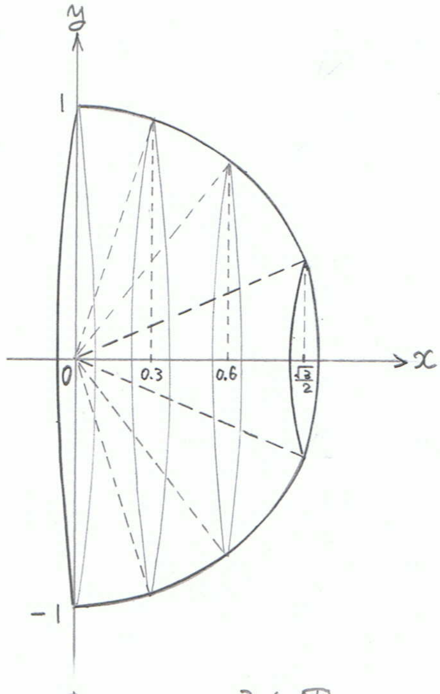
このようにして、全ての点Pの位置で辺OPをx軸のまわりに回転してできた円錐の側面をぎっしり集めると、右下図のような回転体になることがわかる。
そして最も端の円錐によって、穴の空間ができていることもわかる。
そして、この回転体は、x軸の負の側にもできるので、下図が、求めるKの体積となる。





点xにおける円の半径は下図





z軸の上から見た図

半径 $PP' = \sqrt{1^2 - x^2} = \sqrt{1 - x^2}$

したがって、求めるKの体積は

$$2\left\{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \pi\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx - \underbrace{\frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}_{\text{穴の体積}}\right\}$$

$$= 2\pi\left\{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (1-x^2)dx - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = 2\pi\left(\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{24}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{24}\right) = 2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{24}\right) = 2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$= 2\pi \times \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$