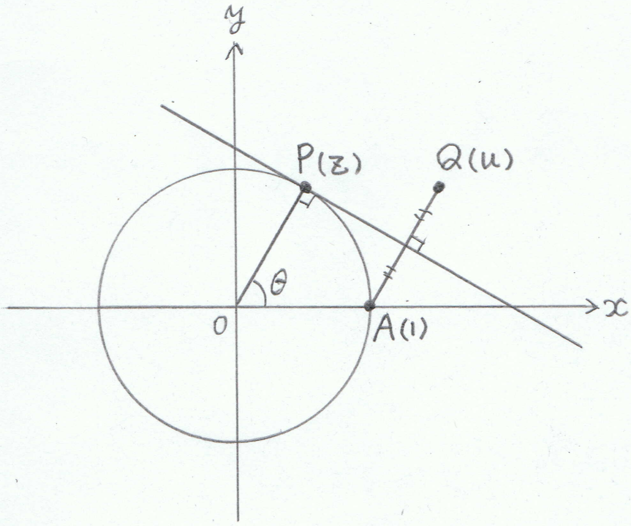
第　5　問

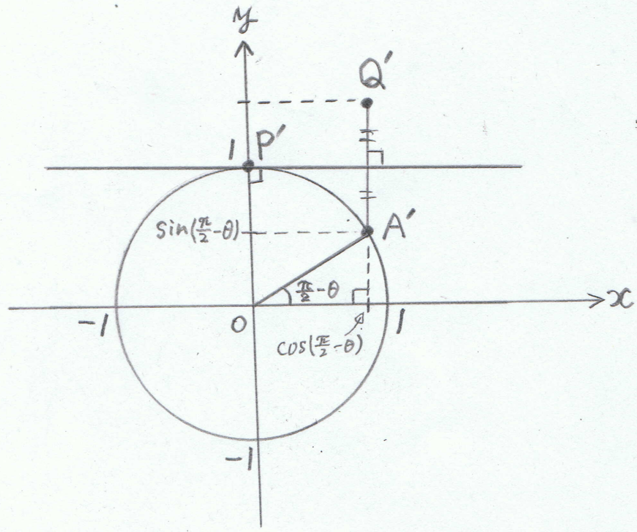
複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする。点 $\mathrm{P}(z)$ は C 上にあり，点 $\mathrm{A}(1)$ とは異なるとする。点 P における円 C の接線に関して，点 A と対称な点を $\mathrm{Q}(u)$ とする。$w=\dfrac{1}{1-u}$ とおき，w と共役な複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1) u と $\dfrac{\overline{w}}{w}$ を z についての整式として表し，絶対値の商 $\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}$ を求めよ。

(2) C のうち実部が $\dfrac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする。点 $\mathrm{P}(z)$ が C' 上を動くときの点 $\mathrm{R}(w)$ の軌跡を求めよ。

(1) まず，複素数 u を求めるために、回転させて、考えてみる。





$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とする。

点P，Aを原点Oを中心にして $\frac{\pi}{2}-\theta$ だけ左回転させると 点P，A，Qは

上右図のように点P'，A'，Q'に移る。

このとき，点P'，A'，Q'の xy 座標は次のようになる。

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$P'(0,1)$

$A'\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$

$Q'\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),1+\left\{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}\right)$ つまり $Q'(\sin\theta,2-\cos\theta)$

すると 点P'，A'，Q'を 複素数で表すと次のようになる

$P'(i)$

$A'\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$

$Q'(\sin\theta+i(2-\cos\theta))$

右回転だから
$-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ だけ
回転させる。

そして、これらの3点を $\frac{\pi}{2}-\theta$ だけ右回転してもどしてやると、

点Q(u)を表す複素数 u が出てくる。

$$u=\{\sin\theta+i(2-\cos\theta)\}\left\{\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)+i\sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)\right\}$$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$
$\cos(-\theta)=\cos\theta$

点αを原点のまわりにθだけ回転
させた点をβとすると
$\beta=\alpha(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$=\{\sin\theta+i(2-\cos\theta)\}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}$$

$$=\{\sin\theta+i(2-\cos\theta)\}(\sin\theta-i\cos\theta)$$

$$=\sin^2\theta-i\sin\theta\cos\theta+i(2-\cos\theta)\sin\theta-i^2(2-\cos\theta)\cos\theta$$

$i^2=-1$

$$=\sin^2\theta-i\sin\theta\cos\theta+2i\sin\theta-i\sin\theta\cos\theta+2\cos\theta-\cos^2\theta$$

= 次ページへ続く

$= 2\cos\theta + 2i\sin\theta - \cos^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta$

$= 2(\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta)$

$i^2 = -1$

$= 2(\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta + i^2\sin^2\theta)$

$= 2(\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta + i\sin\theta)^2$

$z = \cos\theta + i\sin\theta$

$= 2z - z^2$

$$w = \frac{1}{1-u} = \frac{1}{1-2z+z^2}$$

$\overline{1-2z+z^2} = \overline{1} - \overline{2z} + \overline{z^2}$
$= 1 - 2\overline{z} + \overline{z}^2$

$$\overline{w} = \frac{1}{1-2\overline{z}+\overline{z}^2}$$

ここで　$|z|^2 = z\overline{z}$，$|z| = 1$ だから

$z\overline{z} = 1$ となるから

$\overline{z} = \dfrac{1}{z}$

すると

$$\overline{w} = \frac{1}{1-\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{\frac{z^2-2z+1}{z^2}} = \frac{z^2}{z^2-2z+1}$$

したがって

$$\frac{\overline{w}}{w} = \frac{z^2}{z^2-2z+1} \times \frac{1-2z+z^2}{1} = z^2$$

また

$$\frac{|w+\overline{w}-1|}{|w|} = \left|\frac{w+\overline{w}-1}{w}\right|$$

$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

$$= \left|1 + \frac{\overline{w}}{w} - \frac{1}{w}\right|$$

$w = \dfrac{1}{1-2z+z^2}$ だから

$\dfrac{1}{w} = 1-2z+z^2$

$$= \left|1 + z^2 - (1-2z+z^2)\right|$$

$$= \left|1 + z^2 - 1 + 2z - z^2\right|$$

$$= |2z|$$

$$= 2|z|$$

$|z| = 1$

$$= 2 \times 1$$

$$= 2$$

(2) $w=x+yi$ とおくと $\overline{w}=x-yi$

(1)の結果より

$$\frac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}=2 \quad \text{から}$$

$$|w+\overline{w}-1|=2|w|$$

$$|x+yi+x-yi-1|=2|x+yi|$$

$$|2x-1|=2|x+yi|$$

$$\frac{|2x-1|}{2}=|x+yi|$$

$$\left|x-\frac{1}{2}\right|=|x+yi|$$

ここで $|x+yi|=\sqrt{x^2+y^2}$ だから

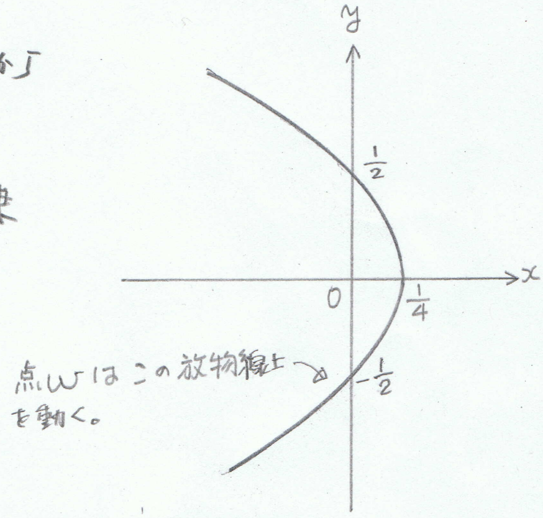
$$\left|x-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$$

両辺2乗

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x^2+y^2$$

$$x^2-x+\frac{1}{4}=x^2+y^2$$

$$\therefore\ x=-y^2+\frac{1}{4}$$



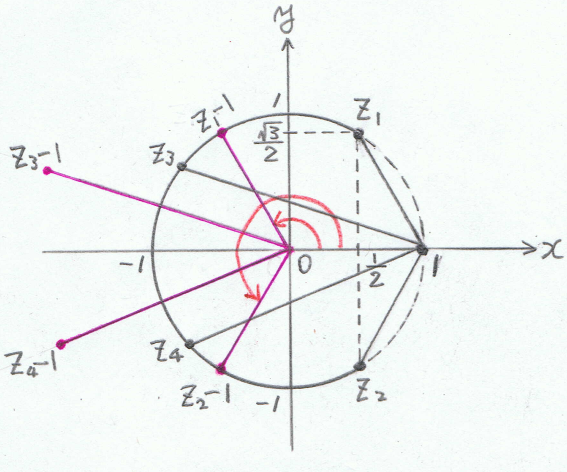
これは 頂点$\left(\frac{1}{4},0\right)$, 軸がx軸の放物線である。

ここで、P(z)に実部が $\frac{1}{2}$ 以下という条件がついているので、放物線の範囲を調べていく。

(1)において

$$w=\frac{1}{1-u}=\frac{1}{1-2z+z^2}=\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{1}{(z-1)^2} \quad \text{-----①}$$

となったので、複素数 $z-1$ の偏角と w の偏角を求めてみる。



z の実部 $\frac{1}{2}$ の点を z_1 と z_2、
実部 $\frac{1}{2}$ より小さい点を z_3, z_4 とする。

左図より $\arg(z_1-1)=\frac{2}{3}\pi$

$\arg(z_2-1)=\frac{4}{3}\pi$

だから

$$\frac{2}{3}\pi \leqq \arg(z-1) \leqq \frac{4}{3}\pi \quad \text{-----②}$$

①より $w = \dfrac{1}{(z-1)^2} = (z-1)^{-2}$

$$\arg w = \arg(z-1)^{-2}$$
$$= -2\arg(z-1)$$

ド・モアブルの定理から
nを整数として
$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ のとき
$\alpha^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$
だから　$\arg\alpha = \theta$ のとき
$\arg\alpha^n = n\theta = n\arg\alpha$

ここで②より

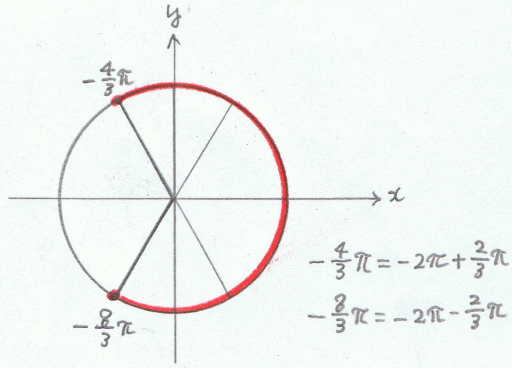
$$\frac{2}{3}\pi \leqq \arg(z-1) \leqq \frac{4}{3}\pi$$

$$-2\times\frac{2}{3}\pi \geqq -2\arg(z-1) \geqq -2\times\frac{4}{3}\pi$$

$$-\frac{4}{3}\pi \geqq -2\arg(z-1) \geqq -\frac{8}{3}\pi$$

つまり

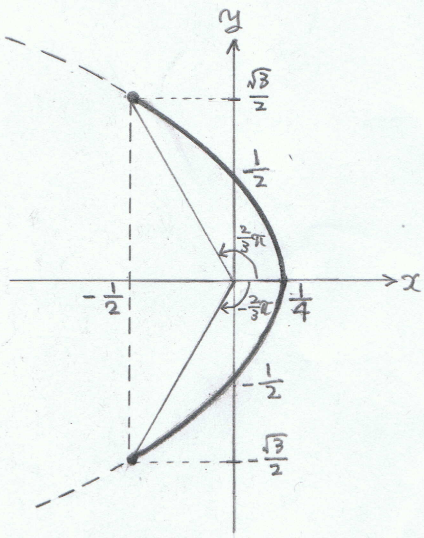
$$-\frac{8}{3}\pi \leqq \arg w \leqq -\frac{4}{3}\pi$$



すなわち　wの偏角$\arg w$の範囲は

$$-\frac{2}{3}\pi \leqq \arg w \leqq \frac{2}{3}\pi$$

求める点R(w)の軌跡を図示すると下図のようになる



したがって点R(w)の軌跡は

$$x = -y^2 + \frac{1}{4} \quad \left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{4}\right)$$